

1. cvičení z MA — 5.10.2010

Funkce

1. Nakreslete grafy následujících funkcí:

- (a) $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos(x + \pi)$, $\cos(2x + \pi)$, $2 \cos x + 1$
- (b) $||x - 1| - 1|$, $||x - 1| - 1|^2$, $||x - 1|^2 - 1|$
- (c) $\sin |x|$, $|\sin x|$
- (d) (skládání funkcí – grafy kreslete jenom zhruba!) $\sin(x^2)$, $(\sin x)^2$, $\sin 1/x$, $\ln \sin x$, $\ln \ln \sin x$
- (e) $\sqrt{1 - x^2}$
- (f) $\sin x \cdot \cos x$
- (g) $x + 1/x$

2. Nalezněte funkci, která zobrazuje interval $(0, 1)$ (a) na interval $(0, \infty)$

(b) na interval $(-\infty, \infty)$

3. Nalezněte funkci, která zobrazuje interval $(0, \infty)$ na interval $(0, 1)$.

4. Funkce f je zadána předpisem $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Určete definiční obor D_f , inverzní funkci f^{-1} a obor hodnot H_f .

Úpravy výrazů

5. Vyřešte v oboru reálných čísel (a) $\sqrt{x^2 - 1} \geq \sqrt{x^2 + x - 6}$

(b) (substituce) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 4} = 1$

(c) $||x - 2| - 3| = 5$

6. (AG-nerovnost) Pro kladná reálná čísla x_1, \dots, x_n platí

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Dokažte **pro $n = 2$** a zapamatujte si pro všechna přirozená n .

7. (Trojúhelníková nerovnost) Bud' $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $|x + y| \leq |x| + |y|$. Speciálně: pokud $\varepsilon > 0$ a $x, y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tak $x + y \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$.

Matematická indukce

8. Pokud pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_n < a_{n+1}$, tak pro každé $m < n$ platí $a_m < a_n$.

9. (a) $2^n \geq n^2$ (pro $n \geq 4$)

(b) Varianta: zkuste to i bez indukce, možná až pro trochu větší n . (Využijte binomickou větu.)

Analogicky (také bez indukce):

(c) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (pro $x > 0$)

(d) $(1 + x)^n \gg n^k$ (pro $x > 0$, k přirozené, a pro dostatečně velká n).

Logika

Tohle byste měli umět, ale netýká se to přímo analýzy. Pokud máte s takovými úkoly problémy, zkuste předmět “Matematické dovednosti”.

10. Pro libovolné výroky a, b jsou následující výroky ekvivalentní. (Připomeňte si napřed pravdivostní tabulky logických spojek – nebo se zeptejte, pokud nevíte oč jde.) Rozmyslete si a dobře zapamatujte, při chápání důkazů se vám to bude hodit!

- (a) $a \Rightarrow b$,
- (b) $\neg b \Rightarrow \neg a$,
- (c) $\neg a \vee b$,
- (d) $\neg(a \& \neg b)$.

11. Řekněte bez použití “implikace”: Nebude-li pršet, nezmoknem. Kdo se bude snažit, dostane zápočet. Kdo získá dost bodů z písemky, dostane zápočet. Kdo nebude nic umět a nebude se snažit, ten nedostane zápočet.

12. Znegujte: Když prší, nevycházím z domu. Nebude-li pršet, nezmoknem. Zmokneme, právě když bude pršet.

13. Zapište pomocí kvantifikátorů a znegujte: Všechna přirozená čísla jsou sudá. Každé prvočíslo je liché. Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly. Mezi n a $2n$ vždy najdeme nějaké prvočíslo.

Čtení výroků

- 14.** Rozhodněte, zda platí následující výroky, nebo jejich negace:
- (a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 0$
 - (b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x < n$
 - (c) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : (x \geq n) \& (x < n + 1)$
 - (d) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : (|x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon)$

15. Vyhovuje funkce daná předpisem $f(x) = \sin x$ následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > K \implies |f(x)| < \varepsilon$$

16. Který z následujících výroků je silnější? (Říkáme, že výrok A je silnější než výrok B , pokud z platnosti A můžeme usoudit, že B také platí.)

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists K > 0) \quad |f(x + 1) - f(x)| \leq K$
- $(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |f(x + 1) - f(x)| \leq K$