Stručné poznámky z MA pro I — ZS 2010/11

Robert Šámal

14. ledna 2011

Tento text se vztahuje k předmětu NMAI054, paralelka X. Vznikl (vzniká) úpravou textu dva roky starého, který vznikl úpravou ještě staršího textu od Stanislava Hencla (děkuji!). Najdete zde soupis definic, vět a něco málo dalších poznámek. Co zde naopak není, jsou důkazy. (Možná pár jich sepíšu . . .) (Avšak pokud důkaz na přednášce nebyl, je to zde napsáno.) Pokud jste důkaz "nechytili" na přednášce, poraďte se s kolegou nebo doporučenou literaturou. Pomocí vodorovných čar jsou odděleny jednotlivé přednášky.
Pokud narazíte na nějakou nesrovnalost, dejte mi prosím vědět. (Připomínkami k minulé verzi pomohli Tomáš Masařík, Ondřej Kupka, Roman Diba a Roman Říha. Děkuji!)
Věty, které jsme si na přednášce dokazovali, jsou rozděleny do dvou typů: L Věta a T Věta (viz požadavky ke zkoušce), tyto věty byste měli umět dokázat. U ostatních vět (a dvou odhlasovaných výjimkách) stačí znát znění (a rozumět mu). Když jsme si dokazovali jen část věty (nebo jsme v důkazu vynechali část), je to v tomto textu uvedeno a budu zkoušet jen tyto části důkazu.
V textu jsou uvedeny otázky k zamyšlení. Mohou vám pomoci k lepšímu vhledu do příslušného tématu. (Některé jsou trochu těžší, tím se nenechte vyvést z míry. Kdyžtak se zeptejte kolegy, a nebude-li vědět, mě.) Další (důležitá!) možnost, jak takové otázky sami generovat: Při čtení znění vět se zamyslete, jak je který předpoklad důležitý; co když místo uzavřeného intervalu bude otevřený? co když funkce nebude spojitá? Pokud je věta implikace, mohla by platit jako ekvivalence? . . . je snadné najít protipříklady – příklady funkcí/posloupností/. . . pro které taková varianta věty neplatí? (Tip: tím si znění i mnohem snáze zapamatujete a také více vychutnáte.) Při čtení důkazu pozorujte, kde a jak se který předpoklad použije. Použila se nějaká věta z dřívější části přednášky? Bylo dopředu jasné, že se použije?

Kapitola 1

Úvod

1.1 Přehled & Úvod do důkazů

V přednášce budeme mluvit o reálných čísech, jejich posloupnostech, řadách a funkcích. Podrobněji:

- **reálná čísla:** v čem se liší od racionálních? Je $0.999\cdots = 1$? Je reálných čísel víc než racionálních?
- **posloupnosti:** zdá se, že $n^2 < 2^n$ (pro velká n) – je to opravdu pravda?
  $(1+1/n)^n \doteq 2.718281828\ldots$ "pro velká n" $(1-1/n)^n \doteq 1/2.718281828\ldots$
  "pro velká n" posloupnost $a_{n+1} = (a_n + 2/a_n)/2$ – jak a PROČ souvisí s $\sqrt{2}$.
  čemu se rovná $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$?
- **řady:** sčítání dvěma způsoby ... někdy může selhat
  $\sum 2^{-i} = 1$ versus $\sum 2^i$ (je potřeba zjistit, zda má řada smysl)
  časem i složitější: $\sum i6^{-i} = ?$
  $\sum \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$
  $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2$
- **funkce:** jak analyzovat funkce (jinak než numericky na počítači) ... a proč "Na kraji města jsme jeli přesně šedesátkou." – co to znamená, proč jsme tím překročili povolenou rychlost někde "uvnitř", ve městě. → Derivace
- **je potřeba dávat pozor**: často věci jasné neplatí ...

L Věta 1.1 (iracionalita $\sqrt{2}$)**.** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Jinak řečeno, pro žádné $q \in \mathbb{Q}$ neplatí $q^2 = 2$.

(Důkaz sporem.)

K zamyšlení: Kde jsme využili, že počítáme odmocninu ze 2, a ne třeba ze 4? Jinými slovy, pro jaká jiná $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Q}$ jde stejným postupem dokázat, že $\sqrt[k]{r} \notin \mathbb{Q}$?
K zamyšlení: Ani následující čísla nejsou racionální: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, ...

L Věta 1.2 (Bernoulliova nerovnost)**.** *Pro $x > -1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $(1+x)^n \geq 1+nx$.*

(Důkaz indukcí.)

K zamyšlení: Je potřeba $x > -1$? Co pro $n = 0$? Jde nerovnost dokázat jinak (třeba jen pro $x > 0$)?

V rychlosti se zmíníme o **velikostech množin.** Napřed dvě definice. Řekneme, že množiny A *a* B *jsou stejně velké* (a píšeme $A \approx B$), pokud existuje bijekce mezi A

a B. Řekneme, že množina A *je menší než* B (a píšeme $A \prec B$), pokud neexistuje zobrazení $f : A \to B$, které by bylo na.
K zamyšlení: Ujasněte si, co je zobrazení, zobrazení prosté, zobrazení na. Také si rozmyslete, že taková definice dává smysl – že dopadne tak, jak by měla pro konečné množiny.

L Věta 1.3 (Cantorova). *1. Pro každou množinu X platí $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

2. Speciálně $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3. Důsledek: $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

Důkaz. Dokážeme první bod sporem, tzv. "diagonální metodou": Kdyby existovalo zobrazení $f : X \to \mathcal{P}(X)$, definujeme "diagonální množinu" D (nakreslete si obrázek!), $D = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Nyní D je podmnožina X, tudíž jeden z prvků $\mathcal{P}(X)$ a mělo by být $D = f(y)$ pro nějaké $y \in X$. Ovšem $y \in D$ znamená $y \notin f(y) = D$, naopak $y \notin D$ znamená $y \in f(y) = D$, což je spor. Dále nahlédneme, že existuje prosté zobrazení $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ (ve skutečnosti jsou tyto množiny stejně velké, takže existuje i bijekce, ale to nechme stranou). K tomu využijeme desetinného zápisu, pro množinu $A \subseteq \mathbb{N}$ položme $h(A) = \sum_{i \in A} 10^{-i}$. Zbývá to vše dát dohromady: pro spor předpokládáme existenci zobrazení $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, které je na a odsud zkonstruujeme zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, které je na, což už víme, že je spor. $\square$

1.2 Množina reálných čísel

Všichni víme, co jsou to přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, jak se rozšiřují tak, aby šlo odčítat (na celá čísla $\mathbb{Z}$), a dělit (na racionální čísla $\mathbb{Q}$). Jak jsme viděli minule, tak stále nejde např. odmocňovat. Místo toho, abychom přidávali jednu další operaci, přidáme v jistém smyslu všechny tím, že "zalepíme díry" (viz Věta 1 níže).
Odbočka: prestože jsme na $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ všichni zvyklí, není nikde apriori zaručeno, že musí fungovat tak, jak bychom rádi. Proto matematici začínají s co nejmenšími předpoklady – axiomy, u kterých je věrohodné, že fungují, a z těch se budují složitější konstrukce. Např. racionální čísla bychom zavedli napřed jako dvojice celých čísel (a, b) (kde $b \neq 0$), pro názornost bychom dvojici mohli zapisovat třeba $a : b$. Pak by bylo třeba říct, kdy jsou dva takové objekty stejné (rozšiřování/krácení zlomků), jak se sčítají, odčítají a násobí, že racionální čísla mají všechny dobré vlastnosti čísel celých – že jsou uzavřená na sčítání a odčítání, která jsou komutativní a asociativní, že násobení je distributivní, ... Pak by se ukázalo, že do racionálních čísel jde přirozeně zanořit čísla celá (jako $x : 1$) a že operace z celými čísly jsou stejné jako jejich zobecnění na čísla racionální. Pak by se konečně mohlo říct, že $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (celá čísla 'ztotožníme' s některými čísly celými). A konečně se řekne, že dělení číslem $(a : b)$ je totéž jako násobení číslem $(b : a)$ (pokud $a \neq 0$, jinak operaci nedefinujeme). Žádný z těchto kroků není příliš těžký, ale je to poněkud zdlouhavé. A to nemluvíme o zavedení čísel reálných. (To jde několika způsoby, buď jako nekonečné desetinné rozvoje, nebo jako tzv. Dedekindovy řezy ($\sqrt{2}$ je 'mezera' mezi množinou $A = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0 \ \& \ q^2 > 2\}$ a jejím doplňkem), nebo jako posloupnosti racionálních čísel, které se k tomu 'novému' blíží. Vše by bylo samozřejmě potřeba říct přesně (zkuste si třeba rozmyslet, jak přesně fungují nekonečné desetinné zápisy a jak se čísla v takových zápisech sčítají nebo násobí). Pak by se muselo strávit několik hodin ověřováním, že všechny operace mají požadované vlastností. My se omezíme na to, že řekneme 'jak to dopadne', jaké vlastnosti reálná čísla mají.)
(Následující definice se vám bude náramně hodit i v LA.)

Definice. Těleso *je pětice* $(T, +, \cdot, 0, 1)$, *kde* T *je množina,* $0 \neq 1$ *prvky* T *a* $+, \cdot$ *operace na* T *tak, že platí pro všechna* $x, y, z \in T$

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(asociativita +)*
2. $x + y = y + x$ *(komutativita +)*
3. $x + 0 = x$ *(neutralita* 0 *vzhledem k +)*
4. *existuje* $-x \in T$ *pro něž* $x + (-x) = 0$ *(existence inverzního prvku pro +)*
5. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(asociativita* $\cdot$*)*
6. $x \cdot y = y \cdot x$ *(komutativita* $\cdot$*)*
7. $x \cdot 1 = x$ *(neutralita* 1 *vzhledem k* $\cdot$*)*
8. *Pokud* $x \neq 0$ *tak existuje* $x^{-1} \in T$ *pro něž* $x \cdot x^{-1} = 1$ *(existence inverzního prvku vzhledem k* $\cdot$*)*
9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ *(distributivita)*

Uvědomte si, že výše uvedené vlastnosi nám umožňují dělat většinu věcí, na které jsme zvyklí: řešit lineární rovnice, dokonce i jejich soustavy (proto se v LA teorie buduje pro obecná tělesa), používat vzorce pro $(x + y)^2$, atd. I když to není úplně viděž, lze z těchto vlastností odvodit i nevinně vypadající $x \cdot 0 = 0$. **K zamyšlení:** Zkuste to!

Definice. Uspořádané těleso *je šestice* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ *taková, že*

1. $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *je těleso*
2. $<$ *je tzv. uspořádání na* T*: pro všechna* $x, y, z, \in T$ *platí*
   - $x < y$ *nebo* $x > y$ *nebo* $x = y$
   - $x < y \;\&\; y < z \implies x < z$
   - $\neg(x < x)$
3. *operace jsou kompatibilní s uspořádáním: pro všechna* $x, y, z, \in T$ *platí*
   - $x < y \implies x + z < y + z$
   - $x < y \& z > 0 \implies x \cdot z < y \cdot z$

Odsud můžeme např. dokázat $0 < 1$ (sporem, protože $0 \neq 1$, stačí vyvrátit $0 > 1$, ...). A také $x^2 > 0$, což nám už umožní zopakovat důkaz Bernoulliho nerovnosti pro obecná uspořádaná tělesa. **K zamyšlení:** Proč je v každém uspořádaném tělese $x^2 > 0$?

Příklad. *Racionální čísla s běžnými operacemi jsou uspořádané těleso. Reálná čísla také (ale ještě přesně nevíme, co to reálná čísla jsou). Komplexní čísla a celá čísla modulo prvočíslo jsou příklady těles, která nejdou uspořádat. (***K zamyšlení:** *Proč?)*

Definice. *Nechť* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ *je uspořádané těleso a* $M \subseteq T$*. Řekneme, že* M *je* omezená shora *(resp.* omezená zdola*), jestliže existuje* $a \in T$ *tak, že pro všechna* $x \in M$ *platí* $x \leq a$ *(resp.* $x \geq a$*). Takové* a *nazveme* horní závora *(resp.* dolní závora*) množiny* M*.*

Definice. *Nechť je opět* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ *je uspořádané těleso a* $M \subseteq T$*. Číslo* $s \in T$ *nazýváme* supremum M *pokud*

1. $\forall x \in M : x \leq s$ *(*s *je horní závora pro* M*), a*
2. $\forall y \in T,\ y < s\ \exists x \in M : y < x$ *(neexistuje menší horní závora pro* M*).*

Číslo $i \in T$ *nazýváme* infimum M *pokud*

1. $\forall x \in M : i \leq x$ *(*i *je dolní závora pro* M*), a*
2. $\forall y \in T,\ i < y\ \exists x \in M : x < y$ *(neexistuje větší dolní závora pro* M*).*

Upozornění: supremum i infimum musí být prvkem T, nepovolujeme např. $\pm\infty$.

Příklad. *Pro konečnou množinu M je $\sup M = \max M$ a $\inf M = \min M$. Pro otevřený interval platí $\sup(a,b) = b$, $\inf(a,b) = a$. Všimněte si, že pro otevřený interval neexistuje maximum ani minimum, v tom je právě výhoda suprema a infima, že existuje vždy (kdy to jde).*

Věta 1.4 (zavedení reálných čisel)**.** *Existuje uspořádané těleso, kde každá neprázdná shora omezená množina má supremum. Takové těleso je v jistém smyslu (až na isomorfismus) jednoznačné. Budeme mu říkat těleso reálných čisel a značit ho $\mathbb{R}$.*

(Bez důkazu.)

Poznámka. *Nebudeme tedy rozebírat, jak přesně reálná čísla vypadají. To by šlo provést (viz diskuze na začátku této přednášky), ale dalo by to dost práce.*

Nyní si ukážeme, jaké důsledky má existence suprema (což je klíčová vlastnost v definici reálných čísel). Uvidíme, že odsud plyne např. archimédovská vlastnost, a také existence odmocnin (takže opravdu přidání suprem bylo aspoň tak dobré, jako přidání odmocnin). Napřed si ale všimněme, že (oproti reálným číslům) v racionálních číslech suprema existovat nemusí.

Uvažme např. množinu $M = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} = \{t \in \mathbb{Q} \mid t > 0 \ \&\ t^2 < 2\}$. Druhý zápis používáme proto, že jednak $\sqrt{2}$ není v $\mathbb{Q}$, jednak zatím ani nevíme, že takové číslo existuje v $\mathbb{R}$! Kdybychom druhý problém pominuli (viz věta o existenci odmocnin níže), tak víme, že supremum M v $\mathbb{R}$ je $\sqrt{2}$, což není racionální číslo. Případné supremum s množiny M v Q by tedy muselo splňovat buď $s > \sqrt{2}$ nebo $s < \sqrt{2}$. V prvním případě ukážeme (díky hustotě racionálních čísel), že existuje racionální číslo $q \in (\sqrt{2}, s)$ a $q^2 > 2$, z čehož plyne že q je menší horní závora. Ve druhém případě (opět díky hustotě $\mathbb{Q}$) najdeme racionální číslo $q \in (s, \sqrt{2})$, čili $q^2 < 2$, z čehož plyne že $q \in M$ a s není horní závora. (Jiný postup je dokázat snazší verzi věty o existenci odmocnin (tak jsme to dělali na přednášce).)

Poznámka. *Značení: $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}_0^-$, intervaly (a,b), $[a,b)$, atd.*

L Věta 1.5 (o existenci infima)**.** *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje $\inf M$.*

Důkaz. Důkaz přímý, položme $M' = -M$ a využijme toho, že M' je neprázdná shora omezená. Má tudíž supremum, označme ho s. Stačí ověřit, že $-s$ je infimum M. □

L Věta 1.6 (Archimédova vlastnost)**.** *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$.*

Důkaz. Dk sporem: jinak by existovalo $s = \sup \mathbb{N}$, $n' > s - 1/2$, $n' + 1$ dává spor. □

Poznámka. *Odsud můžeme třeba ukázat, že $0.999\cdots = 1$.*

L Věta 1.7 (hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existují $q \in \mathbb{Q}$ a $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $q \in (a,b)$ a $r \in (a,b)$.*

Důkaz. (Nástin) Pro existenci q stačí použít Archimédovu vlastnost na důkaz, že existuje dost velký jmenovatel. Pro r užijeme první část pro $(a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2})$. □

T Věta 1.8 (o n-té odmocnině)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, \infty)$. Pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty)$ tak, že $y^n = x$.*

Důkaz. Funguje položit $y = \sup\{t \in \mathbb{R}_0^+ : t^n \leq x\}$. Ale je potřeba hodně věcí ověřit: 1) počítáme supremum z neprázdné, shora omezené množiny. 2) Pokud by $y^n < x$, tak y není horní závora, neboť pro vhodné $\varepsilon > 0$ platí $(y+\varepsilon)^n < x$. 3) Pokud by $y^n > x$, tak y není nejmenší horní závora, neboť pro nějaké $y' < y$ také platí $y'^n > x$. (Tudíž y' je také horní závora pro M, proč?) $\square$

Kapitola 2

Posloupnosti

2.1 Úvod

Definice. Posloupnost reálných čísel *je zobrazení* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Místo* $a(n)$ *píšeme však* a_n, *celou posloupnost značíme* $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, *nebo jen* (a_n).

Poznámka. *1. Definice i mnohé věty fungují stejně i pro komplexní čísla, my se povětšinou omezíme na čísla reálná.*
2. Časem se ukáže, že je šikovné uvažovat i tzv. zobecněné posloupnosti, tj. posloupnosti, které nemusí být v konečně mnoha bodech definovány. (Např. $a_n = 1/(n-211)$ *nepopisuje posloupnost, neboť* a_{211} *není definováno.)*

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je* omezená, *jestliže množina členů posloupnosti, tj. množina* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *je omezená podmnožina* $\mathbb{R}$. *Analogicky definujeme* omezenost shora *a* omezenost zdola.

2.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice. *Nechť* $A \in \mathbb{R}$ *a* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost. Řekneme, že* A *je* (vlastní) limitou *posloupnosti* (a_n), *jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, \ n \in \mathbb{N} \ : |a_n - A| < \varepsilon \,.$$

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
Posloupnost, která má (vlastní) limitu, nazýváme konvergentní *posloupnost.*

Poznámka. *Zápis* $|a_n - A| < \varepsilon$ *je ekvivalentní*[1] *tomu, že* $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. *Mohli bychom tomu také říkat, že* a_n *a* A *jsou "*ε*-blízké". Smyslem definice je, že* a_n *a* A *jsou* ε*-blízké pro libovolné* $\varepsilon > 0$, *"pokud si počkáme", tj. pokud se nestaráme o malá* n. *Zápis* $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0, \ n \in \mathbb{N}$ *bychom také mohli číst "pro skoro všechna* n*", nebo podrobněji "pro všechna* n *až na konečně mnoho výjimek".*

Poznámka. *1. V definici limity lze ekvivalentně psát* $\dots n > n_0 \dots$ *a také* $|a_n - A| \leq \varepsilon$
2. Také lze ekvivalentně psát $|a_n - A| < 2\varepsilon$, *nebo obecněji* $|a_n - A| < K\varepsilon$, *pro jakoukoli kladnou konstantu* K. *(Pozor, důležité!)*

[1] pro reálná čísla, pro komplexní je třeba použít zápis z absolutní hodnotou

3. Limita nezáleží na počátku – pokud změníme konečně mnoho členů posloupnosti, limita se nezmění.
4. Dokonce pro zjištění existence (a hodnoty) limity posloupnosti prvních (např.) sto členů vůbec nepotřebujeme, můžeme tedy definovat i limitu zobecněné posloupnosti, která pro konečně mnoho členů není vůbec definována.

Příklad. *(1)* $1 - 1/n$, *(2)* $(-1)^n$ *(3)* n

L Věta 2.1 (trojúhelníková nerovnost)**.** $(\forall x, y \in \mathbb{R})|x + y| \le |x| + |y|$

Všimněte si, že kdybychom místo $\mathbb{R}$ *psali* $\mathbb{R}^2$ *a místo absolutní hodnoty délku vektoru, tak dostaneme klasickou nerovnost pro délky stran trojúhelníka.*

L Věta 2.2 (jednoznačnost vlastní limity posloupnosti)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Sporem – kdyby existovaly limity $A < B$, zvolíme $\varepsilon = (B - A)/3$ a dostaneme spor – žádné číslo není ε-blízké k A i k B. □

L Věta 2.3 (omezenost konvergentní posloupnosti)**.** *Nechť* (a_n) *má vlastní limitu. Pak je* (a_n) *omezená.*
(Dk snadný.)

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je:*

- klesající, *jestliže* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > a_{n+1}$,
- rostoucí, *jestliže* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < a_{n+1}$.
- neklesající, *jestliže* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \le a_{n+1}$,
- nerostoucí, *jestliže* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \ge a_{n+1}$,

Poznámka. *Posloupnost* (a_n) *je rostoucí, právě když* $(\forall m < n)a_m < a_n$. **K zamyšlení:** *Jak se to dokáže?*

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *je vybraná z posloupnosti* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *tak, že* $b_k = a_{n_k}$.

K zamyšlení: *Je možné, aby byla posloupnost* (b_n) *vybraná z* (a_n) *a také naopak —* (a_n) *vybraná z* (b_n) *— aniž by byly obě posloupnosti identické?*

L Věta 2.4 (o limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *a nechť* (b_k) *je vybraná z* (a_n). *Pak* $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.
(Dk snadný, jen je třeba si rozmyslet, co to znamená.)

T Věta 2.5 (aritmetika limit posloupností)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. *Pak platí*

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = A/B$ *pokud* $B \ne 0$

Příklad. $\lim(4 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2-2n})(5 - \frac{1}{n})$,

Poznámka. *1. Je možné, že* $\lim a_n$ *ani* $\lim b_n$ *neexistuje, avšak* $\lim(a_n + b_n)$ *ano! (*$b_n = -a_n$*,* a_n *"divoká"). Podobně v ostatních případech.*
2. V třetí části chápeme posloupnost a_n/b_n *v zobecněném smyslu (zmíněném po definici posloupnosti). Pokud je* $b_n = 0$ *pro nějaké* n*, pak pro toto* n *není výraz* a_n/b_n *definován. Ovšem pokud* $\lim b_n \ne 0$*, tak se toto může stát jen pro konečně mnoho hodnot* n.

L Věta 2.6 (limita a uspořádání). *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

1. *Jestliže* $A < B$, *pak existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$.
2. *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$, *pak* $A \geq B$.

L Věta 2.7 (o dvou strážnících). *Nechť* (a_n), (b_n), (c_n) *jsou posloupnosti splňující:*

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$,
2. $\lim a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\lim c_n = A$.

Příklad. $\lim \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$

L Věta 2.8 (o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti). *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a* (b_n) *je omezená. Pak* $\lim a_n b_n = 0$.

Příklad. $\lim \frac{\sin(n^2)}{n}$

Příklad. *Standardní limity (jak se spočtou?):* $\lim 1/n^a$ *(pro a racionální),* $\lim q^n$, $\lim \sqrt[n]{a}$, $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim q^n/n^k$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *má* (nevlastní) limitu $+\infty$ *(respektive* $-\infty$*), pokud :*

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N} :\ a_n > K$$

$$(\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N} :\ a_n < K).$$

Věty 2.2, 2.4–7 platí i v případě, že uvažujeme nevlastní limity.

Definice. Rozšířená reálná osa *je množina* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *s následujícími vlastnostmi:*

- *Uspořádání:* $\forall a \in \mathbb{R} \quad -\infty < a < \infty$
- *Absolutní hodnota:* $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$
- *Sčítání:* $\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\} \quad -\infty + a = -\infty$
  $\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\} \quad +\infty + a = +\infty$
- *Násobení:* $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a > 0 \quad a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
  $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a < 0 \quad a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
- *Dělení:* $\forall a \in \mathbb{R} \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0$.

Výrazy $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\textit{cokoli}}{0}$ *nejsou definovány.*

L Věta 2.9 (aritmetika limit podruhé). *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. *Pak platí*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, *MLPSS*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$, *MLPSS*
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / b_n = A/B$, *MLPSS*

(MLPSS značí "má-li pravá strana smysl": tj. výraz na pravé straně je definován.)

(Důkaz – jen součet pro jeden případ)

K zamyšlení: *Pokud výraz na pravé straně smysl nemá, tak nejenže nevíme, čemu je rovna (a zda existuje) limita na levé straně, ale dokonce se tato limita může rovnat čemukoli (nebo neexistovat). Hmm, s jedinou výjimkou, v jednom nedefinovaném případě můžeme něco málo říct – ve kterém a co?*

Definice. *Pro libovolnou množinu* $M \subseteq \mathbb{R}$ *definujme* $\sup M$ *jako nejmenší horní závoru (i nekonečnou) — přesněji,* $\sup M$ *je minimální prvek množiny*

$$\{x \in \mathbb{R}^* : (\forall m \in M) x \geq m\}.$$

Analogicky definujeme $\inf M$ *coby maximální prvek množiny*

$$\{x \in \mathbb{R}^* : (\forall m \in M) x \leq m\}.$$

Poznámka. *1. Pokud je* M *omezená shora, tak tato definice suprema* M *splývá s definicí v druhé přednášce. (***K zamyšlení:** *Proč?)*
2. Pokud je M *shora neomezená, tak jedinou horní závorou je* $+\infty$*, takže* $\sup M = +\infty$*.*
3. Analogicky pro infima. V souhrnu dostáváme, že připustíme-li nekonečné hodnoty, má každá množina reálných čísel supremum i infimum.
4. **K zamyšlení:** *Kolik je* $\sup \emptyset$ *a* $\inf \emptyset$*?*

L Věta 2.10 (limita typu $A/0$)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$*,* $A > 0$*,* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$ *platí* $b_n > 0$*. Pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$*.*

2.4 Hlubší vlastnosti limit

L Věta 2.11 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*
(důkaz příště)

Příklad. *Takto lze např. odvodit, že posloupnost definovaná předpisem* $a_1 = 1$*,* $a_{n+1} = (a_n + 2/a_n)/2$ *(pro každé* $n \geq 1$*) má limitu (je totiž klesající, což lze s trochou práce dokázat). Podle věty o aritmetice limit se dopočte, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$*.*

Poznámka. *V podobném duchu 'nekonstruktivního důkazu existence' jako byla minulá věta se nese tzv. Feketeho lemma: Pokud posloupnost* (a_n) *splňuje* $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ *(je tzv. subaditivní), pak existuje* $\lim a_n/n$ *(a rovná se infimu* a_n/n*).*
Toto má zajímavou kombinatorickou aplikaci (a mnoho podobných): Označme c_n *počet cest délky* n *v nekonečné čtvercové síti (příp. nek. šestiúhelníkové síti, atp.), přičemž počátek je dán. Zjevně* $c_1 = 4$*,* $c_2 = 12$*,* $c_n \leq 4 \cdot 3^{n-1}$*. Obecný vzorec není znám, podmínka 'neprotínání se' se obtížně kontroluje. Je však snadné nahlédnout, že* $c_{m+n} \leq c_m c_n$*, což umožní pro posloupnost* $a_n = \log c_n$ *použív Feketeho lemma a zjistt, že* a_n/n *má limitu, řekněme* a*. Tudíž* $a_n \doteq an$*, a* $c_n \doteq e^{an} = c^n$ *(pro* $c = e^a$*). Zbývá 'jen' najít* c*. To velmi baví teoretické fyziky a diskrétní matematiky.*

T Věta 2.12 (Bolzano-Weierstrassova)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*
(Náznak důkazu: chytáme lva na poušti půlením intervalů, takhle najdeme posloupnost intervalů s jednobodovým průnikem, pak z každého intervalu vybereme jeden bod posloupnosti.)

Poznámka. *Z úplně každé posloupnosti jde vybrat posloupnost, co má limitu.*

Definice. *Nechť* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost. Řekneme, že* $x \in \mathbb{R}^*$ *je* hromadný bod (hromadná hodnota) *posloupnosti* (a_n)*, pokud existuje posloupnost vybraná s limitou* x*. Největší hromadný bod* (a_n) *nazýváme* limes superior *(v překladu horní hranice) a značíme* $\limsup_{n\to\infty} a_n$*. Nejmenší hromadný bod* (a_n) *nazýváme* limes inferior *(v překladu dolní hranice) a značíme* $\limsup_{n\to\infty} a_n$*.*

Poznámka. *(1) Je-li* (a_n) *shora (zdola) neomezená, pak vyjde* $\limsup a_n = \infty$ *(*$\liminf a_n = -\infty$*). (2) Podle Bolzano-Weierstrassovy věty nějaký hromadný bod (a tedy i limes superior a limes inferior) existuje pro každou posloupnost. (3) Posloupnost má limitu právě když má jediný hromadný bod, což je právě když limes superior a limes inferior jsou stejné.*

Příklad. $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n+1/n = 1$, $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n+1/n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} n = \liminf_{n\to\infty} n = \infty$

T Věta 2.13 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnosti)**.** *Posloupnost* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *má vlastní limitu, právě když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon\,.$$

Kapitola 3

Řady

3.1 Úvod

Definice. *Nechť* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost. Číslo* $s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ *nazveme m-*tým částečným součtem *řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem *nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazveme limitu posloupnosti* $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$*, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je* konvergentní. *Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je* divergentní. *Tuto limitu budeme značit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad. *Pokud* $a_n = q^n$*, je* $s_m = \frac{q^{m+1}-q}{q-1}$*. Snadno spočteme limitu posloupnosti* (s_m)*, a tím zjistíme, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{q}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & q > 1 \\ neex. & jinak \end{cases}$$

Poznámka. *Při počítání součtů řad podle definice narazíme na dva problémy: částečné součty může být těžké hezky vyjádřit a (proto) může být obtížné zjistit jejich limitu. Existují rafinovanější metody (metodu mírně rafinovanou si ukážeme příště), pro jejich aplikaci bude ale potřeba vědět, zda daný součet vůbec existuje (a je konečný), neboli zda řada konverguje. Tím se budeme teď (takřka) výhradně zabývat.*

L Věta 3.1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Jestliže je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka. *Tato podmínka rozhodně NENÍ postačující: např.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ *(jak brzy uvidíme), třebaže* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

L Věta 3.2 (linearita řad)**.** *(i) Nechť* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \text{ konverguje .}$$

Navíc, pokud obě řady konvergují, tak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(ii) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ konverguje.}$$

Navíc, pokud řady konvergují, tak $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.2 Řady s nezápornými členy

Poznámka. *Pro řady s nezápornými členy podle věty II.9 limita částečných součtů existuje, jde tedy "jen" o to, zda tato limita je konečná (řada konverguje) nebo nekonečná (řada diverguje).*

L Věta 3.3 (srovnávací kritérium konvergence řad)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$*. Pak*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$
$$(ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ diverguje}.$$

L Věta 3.4 (limitní srovnávací kritérium konvergence řad)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*$*. Pak*

$$(i)\ \textit{Jestliže } K \in (0,\infty),\ \textit{pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$
$$(ii)\ \textit{Jestliže } K = 0,\ \textit{pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$
$$(ii)\ \textit{Jestliže } K = \infty,\ \textit{pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje}.$$

L Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium konvergence řad)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$
$$(ii)\ \exists q > 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} > q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$
$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$
$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$

K zamyšlení: *V částech (iii) a (iv) lze místo* lim *psát* lim sup.

Věta 3.6 (d'Alambertovo podílové kritérium konvergence řad)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* *řada s kladnými členy.*

(i) $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(ii) $\exists q > 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje,*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

(Bez důkazu.)

K zamyšlení: *V části* (*iii*) *lze místo* lim *psát* lim sup.
K zamyšlení: *Lze říci, zda je lepší podílové nebo odmocninové kritérium?*

Příklad. *Zkoumejme řady* $\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$. *(***K zamyšlení:** *Co tento součet říká o házení hrací kostkou?) Použijeme podílové kritérium (šlo by i odmocninové, s trochu těžší limitou. Máme*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}\frac{5}{6}$$

a tedy $\lim a_{n+1}/a_n = 5/6 < 1$. *Proto má řada konečný součet, označme ho* S. *Můžeme ale dále počítat*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} + \frac{5}{6}\sum_{k=0}^{\infty} k)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1/6}{1-5/6} + \frac{5}{6}S \end{aligned}$$

Odsud již snadno zjistíme, že $S = 6$.

T Věta 3.7 (kondenzační kritérium konvergence řad)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy splňující* $a_{n+1} \leq a_n$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje.}$$

Důsledek *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *konverguje* $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}$ *konverguje* $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

K zamyšlení: *Jak je to s řadou* $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^\alpha}$*?*
K zamyšlení: *Cauchyho (a vlastně i d'Alambertovo) kritérium se získá srovnáním s geometrickou řadou* $\sum_n q^n$. *Zkuste vymyslet kritérium srovnáním s řadou* $\sum_n 1/n^\alpha$.

3.3 Neabsolutní konvergence řad

Definice. *Nechť pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *platí, že* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konverguje. Pak říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

L Věta 3.8 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad)**.** *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N}, \; m \geq n_0, \; n \geq n_0 : \quad \Big| \sum_{j=n}^{m} a_j \Big| < \varepsilon.$$

L Věta 3.9 (vztah konvergence a absolutní konvergence)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

L Věta 3.10 (Leibnitzovo kritérium konvergence řad)**.** *Nechť* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \textit{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

(dk byl až na další přednášce)

Poznámka. *(1) Vlastnost "*b_n *je klesající posloupnost s limitou 0" značíme* $b_n \searrow 0$*.*
(2) Existuje zobecnění této věty na řady $\sum_n a_n b_n$*, pro* $b_n \searrow 0$*. Podmínka, kterou se nahradí* $a_n = (-1)^n$ *v Leibnitzovu kritériu, je "řada* $\sum a_n$ *má omezené částečné součty" (tzv. Dirichletovo kritérium).*

Poznámka. *(1) Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní řada. Pak po libovolné změně pořadí jejích členů dostaneme absolutně konvergentní řadu (kterou můžeme formálně zapsat* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$*, pro nějakou bijekci* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*) se stejným součtem.*
(2) Naproti tomu pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, avšak nikoliv absolutně (tj.* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$*), pak změnou pořadí jejích členů lze dostat libovolný součet z* $\mathbb{R}^*$*.*

3.4 Součin řad

Tak jako pro konečné součty bychom i pro součty nekonečné (řady) chtěli používat distributivitu (roznásobování závorek). Je ale potřeba se rozhodnout, v jakém pořadí budeme jednotlivé členy sčítat.

Definice. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady.* Cauchyovským součinem *těchto řad nazveme řadu*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i \Big).$$

Věta 3.11 (o součinu řad)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují absolutně. Pak*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i \Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big) \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Big).$$

(Bez důkazu.)

Příklad. *Položme*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Pomocí výše uvedených kritérií zjistíme, že uvedená řada (s parametrem x) konverguje absolutně pro každé x, a že $\exp(0) = 1$. Pomocí věty o součinu řad (a trochy počítání) zjistíme, že $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

Poznámka. *Vybočme na chvíli z rámce zkoumání funkcí (řad, ...) s reálnými hodnotami, a podívejme se na čísla komplexní. Ta lze formálně zavést jako výrazy $a + bi$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, kde i je "nové číslo" splňující $i^2 = -1$. Sčítání, odčítání i násobení funguje podle očekávání, není těžké ukázat, že lze i dělit (nenulovými čísly). Jako absolutní hodnotu čísla $a + bi$ označíme $\sqrt{a^2 + b^2}$, neboli vzdálenost od počátku v obvyklém znázornění komplexních čísel v rovině. Oproti vektorovému prostoru $\mathbb{R}^2$ mají však komplexní čísla (značíme $\mathbb{C}$) výhodu "početní" – tvoří těleso (byť ne uspořádané).*
Zajímavá část analýzy se zabývá funkcemi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jejich derivováním, atd. Tak daleko nepůjdeme. Všimněme si však, že posloupnosti komplexních čísel lze vyšetřovat analogicky k posloupnostem čísel reálných (jen je třeba "nově interpretovat" absolutní hodnotu v definici limity). Přijdeme pouze o benefity uspořádání, zejména o větu o strážnících. Rovněž definici součtu řady komplexních čísel můžeme opsat. Stejný bude i vztah absolutní konvergence a konvergence. Pro zkoumání konvergence řad, které nekonvergují absolutně bychom však museli použít silnější nástroj[1] než je Leibnitzova věta, nemáme už totiž komfortní pojem "střídání znamének", na kterém je Leibnitzova věta založena.
Můžeme tedy výše uvedenou definici exp *rozšířit i na komplexní čísla a posléze položit $\cos x = (\exp(ix) + \exp(-ix))/2$ a obdobně definujeme $\sin x$. Poté můžeme ověřit, že takto definované funkce mají očekávané vlastnosti.*

[1] jmenovitě Abel-Dirichletovo kritérium

Kapitola 4

Funkce jedné reálné proměnné

4.1 Základní definice

(Pozn.: následující základní definice byly na přednášce z časových důvodů rozstrkány do různých míst, tady je pro přehled uveďme pohromadě.)

Definice. Funkcí jedné reálné proměnné *rozumíme zobrazení* $f : M \to \mathbb{R}$, *kde* $M \subseteq \mathbb{R}$. *Množina* M *se nazývá* definiční obor *funkce* f *a značí* D_f.

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je*

rostoucí, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y : \quad f(x) < f(y)$,

klesající, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y : \quad f(x) > f(y)$,

nerostoucí, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y : \quad f(x) \geq f(y)$,

neklesající, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y : \quad f(x) \leq f(y)$.

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je*

sudá, *jestliže* $\forall x \in M : \quad -x \in M \ \&\ f(x) = f(-x)$,

lichá, *jestliže* $\forall x \in M : \quad -x \in M \ \&\ (f(x) = -f(-x))$,

periodická, *jestliže*

$$\exists p > 0\ \forall x \in M : \quad x + p \in M \ \&\ x - p \in M \ \&\ f(x) = f(x + p)\,.$$

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je* omezená *(*omezená shora, omezená zdola*), jestliže* $f(M)$ *je omezená (shora omezená, zdola omezená) podmnožina* $\mathbb{R}$. *Symbolem* $f(M)$, *nebo také* H_f *značíme* množinu hodnot funkce f, *tj. množinu* $\{f(x) : x \in M\}$.

Definice. *Nechť* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. *Řekneme, že funkce* f *nabývá v bodě* $a \in M$

maxima na M *jestliže* $\forall x \in M : \ f(x) \leq f(a)$,

minima na M *jestliže* $\forall x \in M : \ f(x) \geq f(a)$,

ostrého maxima na M *jestliže* $\forall x \in M,\ x \neq a : \ f(x) < f(a)$,

ostrého minima na M *jestliže* $\forall x \in M,\ x \neq a : \ f(x) > f(a)$,

lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima) na M *jestliže existuje* $\delta > 0$ *tak, že* f *nabývá na* $M \cap (a-\delta, a+\delta)$ *svého maxima (ostrého maxima, ostrého minima, minima).*

K zamyšlení: *Může nějaká funkce nabývat lokálního minima v každém bodě definičního oboru? Ostrého lokálního minima? Co když chceme, aby funkce byla definovaná na celém* $\mathbb{R}$*? (Pozor, poslední část je těžká!)*

Definice. *Buďte* $f : M \to \mathbb{R}$ *a* $g : N \to \mathbb{R}$ *funkce,* $M, N \subseteq \mathbb{R}$. *Složením těchto funkcí myslíme funkci* $h : N' \to \mathbb{R}$, *kde*

1. $h(x) = f(g(x))$ *pro všechna* $x \in N'$
2. $N' = \{x \in N : g(x) \in M\}$

Definice. *Nechť* f *je funkce a* J *je interval. Řekneme, že* f *je* prostá na J, *jestliže pro všechna* $x, y \in J$ *platí* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. *Pro prostou funkci* $f : J \to \mathbb{R}$ *definujeme* funkci inverzní $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$ *předpisem* $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

4.2 Limity

Začněme pojmem, který popisuje, co to znamená "být blízko bodu a".

Definice. *Nechť* $\delta > 0$ *a* $a \in \mathbb{R}$. Prstencové okolí *bodu je*

$$P(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}; \quad P(+\infty,\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad P(-\infty,\delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé prstencové okolí *bodu a je*

$$P_+(a,\delta) = (a, a+\delta); \quad P_-(a,\delta) = (a-\delta, a).$$

Okolí *bodu je*

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta); \quad U(+\infty,\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad U(-\infty,\delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé okolí *bodu a je*

$$U_+(a,\delta) = [a, a+\delta); \quad U_-(a,\delta) = (a-\delta, a].$$

Definice. *Nechť* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. *Řekneme, že* f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$ limitu *rovnou* $A \in \mathbb{R}^*$, *jestliže platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a,\delta) : \quad f(x) \in U(A,\varepsilon).$$

Značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Poznámka. *(1) Hlavní užitek v zavedení značení* $P(a,\delta)$ *apod. je možnost zkoumat najednou případy kdy* a, A *jsou reálná čísla a kdy jsou to* $\pm\infty$. (**K zamyšlení:** *Kolik případů bychom jinak museli v definici rozlišit?) Pokud chceme nakreslit vhodný obrázek, pak ovšem musíme stejně případy rozlišovat.*
Další výhodou je možnost zobecnění, v části matematiky zvané topologie *se obecně zkoumá, jaké vlastnoti má mít "systém okolí" a jak pomocí takového systému nadefinovat spojitost i pro zobrazení mezi složitějšími objekty než jsou reálná čísla.*
(2) Ekvivalentně můžeme v definici limity psát

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ f(P(a,\delta)) \subseteq U(A,\varepsilon).$$

(3) Pokud je $a, A \in \mathbb{R}$, *pak lze definici napsat také ve formě*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

(4) V definici limity $f : M \to \mathbb{R}$ v bodě a se nic nepraví o hodnotě $f(a)$, dokonce ani nemusí být $f(a)$ definováno (tj. $a \in M$). Co však chceme, je aby nějaké prstencové okolí *bodu a bylo celé v M (to plyne z definice: pokud říkáme, že $f(x)$ je prvkem nějaké množiny, říkáme tím implicitně též, že $f(x)$ je definováno).*
(5) Kdybychom předchozí varování ignorovali (definici limity lze poněkud rozšířit), dostali bychom pro funkce definované na $M = \mathbb{N}$ a pro $a = +\infty$ definici limity posloupnosti v novém jazyce.
(6) Jiné značení: $f(x) \xrightarrow{x \to a} A$.

Příklad. *(1) Pokud $f(x) = x$, pak je $\lim_{x\to a} f(x) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}^*$. (V definici můžeme volit δ rovno ε.)*
(2) Pokud $f(x) = 1/|x|$, pak je $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. (V definici můžeme opět volit δ rovno ε.)

Definice. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$* limitu zprava (zleva) *rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a, \delta) : \quad f(x) \in U(A, \varepsilon)$$

$$\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(a, \delta) : \quad f(x) \in U(A, \varepsilon)\big).$$

Značíme $\lim_{x\to a_+} f(x) = A$ ($\lim_{x\to a_-} f(x) = A$) nebo stručněji $f(a_+) = A$ ($f(a_-) = A$).

Příklad. *Pokud $f(x) = 1/x$, pak je $\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$, zatímco $\lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty$.*

Definice. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je v a* spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva)*, jestliže*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ (\lim_{x\to a_+} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to a_-} f(x) = f(a)).$$

T Věta 4.1 (Heineho věta)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $f : M \to \mathbb{R}$ a f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

(ii) pro každou posloupnost $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takovou, že
$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in M, x_n \neq a$ & $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

L Věta 4.2 (o jednoznačnosti limity funkce)**.** *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

(Následující věta byla až na další přednášce.)

L Věta 4.3 (limita funkce a omezenost)**.** *Nechť f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je na $P(a, \delta)$ omezená.*

T Věta 4.4 (o aritmetice limit funkcí)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí*

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *MLPSS.*
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *MLPSS.*
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *MLPSS.*

L Důsledek Věty 4: *Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $f+g$, $f \cdot g$ spojité v a. Pokud je navíc $g(a) \neq 0$, pak je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a.*

Příklad. *Funkce daná předpisem $f(x) = x$ je spojitá (její limitu jsme už počítali), stejně jako konstantní funkce. Odsud plyne, že jsou spojité i všechny polynomy a racionální lomené funkce (v bodech, kde jsou definované). Elementární funkce jsou též definovány jako spojité (s výjimkou* tg *a* cotg*, které mají předepsané body nespojitosti.*

Poznámka. *Věta o dvou strážnících pro funkce – na přednášce nebyla, uvádíme ji zde pro zajímavost a pro podobnost se stejnou větou pro posloupnosti.)*
Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(a,\delta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje $\lim_{x\to a} h(x)$ a všechny tři limity se rovnají.

T Věta 4.5 (limita složené funkce)**.** *Nechť funkce f a g splňují:*

1. $\lim_{x\to c} g(x) = A$,
2. $\lim_{y\to A} f(y) = B$.

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek
(P1) f je spojitá v A
(P2) $\exists \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta) :\ g(x) \neq A$
pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Příklad. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$

Poznámka. *Věta o limitě monotónní funkce – na přednášce nebyla, uvádíme ji zde pro zajímavost a pro podobnost se stejnou větou pro posloupnosti.)*
Nechť f je monotónní na intervalu (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje $\lim_{x\to a_+} f(x)$ i $\lim_{x\to b_-} f(x)$.

4.3 Funkce spojité na intervalu

Definice. Vnitřními body *intervalu J rozumíme ty body z J, které nejsou krajními. Množinu těchto bodů nazýváme* vnitřek J *(*int J*).*

Definice. *Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f* je spojitá na J*, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech J. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě a je-li koncový bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.*

T Věta 4.6 (Darbouxova vlastnost spojité funkce)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a,b)$ tak, že $f(x) = y$.*

Poznámka. *Předchozí věta vypadá nenápadně, ale je velmi užitečná. Pomocí ní bychom například ze spojitosti funkce x^n mohli snadno odvodit existenci odmocniny z každého kladného čísla, což na začátku semestru byla nelehká věta. Obecněji, máme-li spojitou funkci f, pro kterou $f(a) < 0 < f(b)$, tak existuje kořen $x \in (a,b)$ (tj. bod splňující $f(x) = 0$). Můžeme ho nalézt např. metodou půlení intervalů, pro $c = (a+b)/2$ zkontrolujeme, zda $f(c) = 0$ (pak jsme hotovi), $f(c) > 0$ (pak položíme $b := c$), nebo $f(c) < 0$ (pak $a := c$). Tento postup je poměrně efektivní, každým krokem získáme novou binární číslici. Hledáním ještě efektivnějších (tj. rychlejších) metod se zabývá tzv. numerická matematika).*

4.4 Derivace funkce

Dá se říci, že pořádná analýza začíná až tehdy, když se naučíme derivovat. Budeme pak umět mnohem lépe zkoumat chování funkcí (hledat extrémy, zkoumat kde je funkce rostoucí a kde klesající), atd. Následující definice možná vypadá děsivě, ale jedná se vlastně o přirozený pojem. Pokud např. $f(x)$ označuje polohu bodu na přímce v čase x (a pokud je f rostoucí), tak $(f(a+h) - f(a))/h$ je průměrná rychlost mezi časy a a $a+h$. Limitu (pokud existuje) těchto průměrných rychlostí můžeme nazvat okamžitou rychlostí v čase a, obecně derivací v bodě a.

Definice. *Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak* derivací f v bodě a *budeme rozumět*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f v bodě a zprava *budeme rozumět*

$$f'_{+}(a) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f v bodě a zleva *budeme rozumět*

$$f'_{-}(a) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

L Věta 4.7 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak je f v bodě a spojitá.*

T Věta 4.8 (aritmetika derivací)**.** *Nechť $f'(a)$ a $g'(a)$ existují.*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *MLPSS*
2. *Nechť je g spojitá v a pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, MLPSS.*
3. *Nechť je g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, MLPSS.*

(MLPSS = Má-li pravá strana smysl.)
(Důkaz jen pro součet a součin.)

T Věta 4.9 (derivace složené funkce)**.** *Nechť f má derivaci v bodě y_0, g má derivaci v x_0 a je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

je-li výraz vpravo definován.
(Důkaz byl až na další přednášce, jen za předpokladu $g'(x_0) \neq 0$.)

L Věta 4.10 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je na intervalu (a, b) spojitá a rostoucí (respektive klesající). Nechť f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Příklad. *Podle definice a "součtových vzorců" spočteme $(e^x)', (\sin x)'$. Podle věty o derivaci inverzní funkce odsud získáme $(\log x)'$ a $(\arcsin x)'$. Z derivace e^x a $\log x$ můžeme získat derivaci obecné mocniny $x^t = e^{t \log x}$. (Pro t přirozené toto můžeme snáze udělat pomocí věty o derivaci součinu, případně pomocí binomické věty přímo z definice.)*

Nyní, když víme jak se derivace počítá, můžeme se podívat na to, k čemu nám bude. První aplikací bude počítání limit:

Věta 4.11 (l'Hospitalovo pravidlo)**.**
(*i*) *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0$ *a nechť existuje* $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(*ii*) *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a_+} |g(x)| = \infty$ *a nechť existuje* $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Pak*

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Bez důkazu.)

Jako důsledek dostaneme následující větu, která nám umožní počítat derivace v "divných bodech".

L Věta 4.12 (derivace a limita derivace)**.** *Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $lim_{x\to a_+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.*

Příklad. *Buď $f(x) = e^{-1/x^2}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Podle vzorců pro derivaci složené funkce dostaneme, že pro $x \neq 0$ je $f'(x) = e^{-1/x^2}\frac{2}{x^3}$. Protože f je v 0 spojitá (ověřte!), tak můžeme použít předchozí větu. Pokud bude existovat limita $f'(x)$ (zprava, zleva), bude se tato limita rovnat derivaci (zprava, zleva). Snadno se spočte, že tato limita se rovná nule, je tedy $f'(0) = 0$.*
O něco víc práce dá ukázat, že i derivace vyššího řádu (tj. derivace derivace, neboli druhá derivace, dále třetí atd.) jsou v nule rovny nule. Toto je neobvyklé, "normální" funkce, pokud má v nule všechny derivace nulové, tak je nulová všude.

Dále se obraťme k možná zásadnějšímu použití derivací – vyšetřování průběhu funkce.

L Věta 4.13 (Fermatova věta)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.*

L Věta 4.14 (o vztahu derivace a monotonie)**.** *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci.*

1. *Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f rostoucí na J.*
2. *Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f klesající na J.*
3. *Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f neklesající na J.*
4. *Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f nerostoucí na J.*

(Důkaz byl na poslední přednášce.)

4.5 Konvexní a konkávní funkce

Definice. Druhá derivace *funkce f v bodě a ($f''(a)$) je derivace funkce $f'(x)$, čili*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Definice. *Funkce f na intervalu I nazveme* konvexní (konkávní)*, jestliže*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

$$\Big(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}\Big).$$

Funkci nazveme ryze konvexní (ryze konkávní)*, je-li příslušná nerovnost ostrá.*

Věta 4.15 (vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))**.** *Nechť f má na intervalu (a,b) spojitou první derivaci.*

$$\begin{aligned}
&\textit{Jestliže } \forall x \in (a,b): \ f''(x) > 0, \ \textit{pak } f \textit{ je ryze konvexní.}\\
&\textit{Jestliže } \forall x \in (a,b): \ f''(x) < 0, \ \textit{pak } f \textit{ je ryze konkávní.}\\
&\textit{Jestliže } \forall x \in (a,b): \ f''(x) \geq 0, \ \textit{pak } f \textit{ je konvexní.}\\
&\textit{Jestliže } \forall x \in (a,b): \ f''(x) \leq 0, \ \textit{pak } f \textit{ je konkávní.}
\end{aligned}$$

(Bez důkazu.)

Definice. *Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme*

$$T_a = \{[x,y]: \ x \in \mathbb{R}, \ y = f(a) + f'(a)(x-a)\}$$

tečnu ke grafu f v bodě $[x, f(x)]$. *Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D_f$ leží* nad (pod) tečnou T_a*, jestliže platí*

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad \big(f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)\big).$$

Definice. *Funkce f má v bodě a* inflexi *(a je* inflexní bod*), jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ tak, že*

$$\begin{aligned}
&(i) \ \forall x \in (a-\delta, a): \ [x, f(x)] \textit{ leží nad tečnou,}\\
&(ii) \ \forall x \in (a, a+\delta): \ [x, f(x)] \textit{ leží pod tečnou,}
\end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned}
&(i) \ \forall x \in (a-\delta, a): \ [x, f(x)] \textit{ leží pod tečnou,}\\
&(ii) \ \forall x \in (a, a+\delta): \ [x, f(x)] \textit{ leží nad tečnou,}
\end{aligned}$$

Věta 4.16 (podmínky pro inflexi)**.** *(1) (nutná) Nechť $f''(z) \neq 0$. Pak z není inflexní bod funkce f.*
(2) (postačující) Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a,b). Nechť $z \in (a,b)$ a platí

$$\forall x \in (a,z): f''(x) > 0 \ \textit{a} \ \forall x \in (z,b): f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod f.
(Bez důkazu.)

4.6 Průběh funkce

Definice. *Řekneme, že funkce $x \mapsto ax+b$, $a,b \in \mathbb{R}$, je* asymptotou funkce f v ∞ (resp. $-\infty$)*, jestliže*

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0 \quad (\textit{resp.} \ \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0).$$

L Věta 4.17 (tvar asymptoty)**.** *Funkce f má v ∞ asymptotu $ax+b$, právě když*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \ \textit{a} \ \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - ax\big) = b \in \mathbb{R}.$$

Uveďme si v souhrnu, jak vyšetřovat průběh funkce:

1. *Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.*
2. *Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.*

3. *Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicitu.*
4. *Dopočítáme limity v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti (pokud existují).*
5. *Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.*
6. *Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.*
7. *Vypočteme asymptoty funkce.*
8. *Načtneme graf funkce a určíme obor hodnot.*

4.7 Zpět ke spojitým funkcím

Věta 4.18 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť J je interval. Nechť funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak je $f(J)$ interval.*
(Bez důkazu.)

Věta 4.19 (spojitost funkce a nabývání extrémů)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a minima, takže je na $[a, b]$ omezená.*
(Bez důkazu.)

T Věta 4.20 (o inverzní funkci)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom je funkce f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

L Věta 4.21 (Rolleova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.*

L Věta 4.22 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a, b). Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Odsud jsme dokázali vztah monotonie a derivace.

4.8 Elementární funkce

Nyní si ukážeme, jak můžeme využít vybudované nástroje na analýzu některých funkcí.

T Věta 4.23 (zavedení exponenciály)**.** *Existuje právě jedna funkce* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

1. $\exp(x)$ *je rostoucí na* $\mathbb{R}$,
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
3. $\exp(0) = 1$,
4. $H_{\exp} = (0, \infty)$,
5. $\exp$ *je spojitá*
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

(Důkaz: Zavedli jsme $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *a chvíli počítali … Nestihli jsme obor hodnot. Připomeňte si, že z posledního bodu jsme již dříve odvodili, že* $(\exp(x))' = \exp(x)$*, odsud bychom mohli jinak dokázat, že* $\exp$ *je rostoucí. Také bychom si mohli všimnout, že i druhá derivace je kladná, takže* $\exp$ *je konvexní funkce.)*

Definice. *Funkci inverzní k exponenciále* exp *nazýváme* logaritmus log.

Věta 4.24 (vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* log *splňuje:*

1. $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *je spojitá rostoucí funkce,*
2. $\forall x, y > 0 \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1$.

(Bez důkazu.)

Důkaz jsme nestihli, plynul by však snadno z věty o inverzní funkci a věty o limitě složené funkce. Dále jsme si v rychlost řekli o trigonometrických funkcích a funkcích k nim inverznich. Pro úplnost si zde uveďme jejich vlastnosti.

Věta 4.25 (zavedení sinu a cosinu)**.** *Existují funkce* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x$,
2. *existuje kladné číslo* π *tak, že* sin *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$ *a* $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Funkce sin *a* cos *(a číslo* π*) jsou těmito vztahy určeny jednoznačně.*
(Bez důkazu.)

Poznámka. *Odsud již plynou všechny ostatní vlastnosti funkcí sinus a cosinus, tj. např. vzorec pro* $\sin(2x)$, $\cos x/2$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, *atd.*

Definice. *Pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$ *a* $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *definujeme funkce* tangens *a* cotangens *předpisem*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \text{ a } \ \operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta 4.26 (spojitost sinu a cosinu)**.** *Funkce* sin, cos, tg *a* cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*
(Bez důkazu.)

Definice. *Nechť*

$$\begin{aligned}
\sin^* x &= \sin x \ \text{ pro } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \\
\cos^* x &= \cos x \ \text{ pro } x \in [0, \pi], \\
\operatorname{tg}^* x &= \operatorname{tg} x \ \text{ pro } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \ \text{ a} \\
\operatorname{cotg}^* x &= \operatorname{cotg} x \ \text{ pro } x \in (0, \pi).
\end{aligned}$$

Definujeme arcsin *(respektive* arccos, arctg, arccotg*) jako inverzní funkci k funkci* $\sin^*$ *(respektive* $\cos^*$, tg^*, cotg^**).*

K zamyšlení: *Rozmyslete si, čemu se rovná* $\sin \arcsin x$ *a čemu* $\arcsin \sin x$.

Poznámka.
- *Jak bylo už uvedeno výše, sinus a cosinus lze zavést vztahy.* $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ *a* $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.
- *Poznamenejme, že obdobně se definují tzv. hyperbolické funkce sinus hyperbolický a cosinus hyperbolický.* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ a $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. *(Tyto funkce se nazývají hyperbolické neboť se k rovnoosé hyperbole* $(x \mapsto 1/x)$ *mají tak, jak goniometrické funkce (sinus a spol.) ke kružnici.*