Kombinatorické etudy 3

1. V soutěži ve skoku dalekém opět skáče n skokanů v náhodném pořadí (a žádní dva neskočí stejně). Sázková kancelář přijímá pouze jeden druh sázek: po provedeném skoku si lze vsadit na to, že závodník co právě skočil bude celkový vítěz. Protože jsme přišli pozdě, můžeme sázet až po k-tém skoku. Jaká je pravděpodobnost výhry? (Máme jenom jeden tip.)

2. Rovinný graf s n vrcholy má maximálně $3n - 6$ hran. Pokud nemá trojúhelníky, tak maximálně $2n - 4$ hran.

3. Graf $G_1 \times G_2$ (kategoriální součin) je souvislý, právě když G_1 i G_2 jsou souvislé a jeden z nich obsahuje lichou kružnici.

4. Buď G bipartitní graf s partitami A, B a M párování v G. Označme A_1, B_1 množiny těch vrcholů z A, B, které nesousedí s hranou z M. Vytvořme maximální les $F \subseteq G$, který splňuje

- každý vrchol $x \in V(F) \cap B$ sousedí s dvěma hranami z F, jedna z nichž je i v M;
- každá komponenta F obsahuje vrchol z A_1.

Dokažte, že M je maximální párování právě když žádný vrchol z B_1 nesousedí s vrcholem z F.

Odvoďte z toho Königovu větu (z minulé série: $\nu(G) = \tau(G)$). Odvoďte z toho algoritmus na nalezení maximáního párování v bipartitních grafech.

5. Vrcholy grafu G lze pokrýt nejvýše $\alpha(G)$ disjunktními kružnicemi, hranami a vrcholy.

6.

(a) Pokud každý vrchol grafu G má stupeň alespoň 3, tak G obsahuje dělení K_4.
(b) Stejný závěr platí pokud graf s $n \geq 4$ vrcholy má alespoň $2n - 2$ hran.