

9. cvičení z MA—15. a 17.12.2008

Další limity funkcí

Jak je limita funkce definovaná? Jak se liší limita funkce a limita posloupnosti? Která věta je spojuje? Jaké metody znáte na výpočet limit funkcí? (VOAL, věta o policaitech ... časem přibudou věta o limitě složené funkce, l'Hospitalovo pravidlo a Taylorův polynom) Jaké znáte "standardní limity"?

Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, pro $a = 0, 1, \infty, -\infty$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$,
- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$. (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$,
- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} ([x] - x)$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$.
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt{x+9}-2}$.
- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.
- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$, (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)} - x)$.
- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x)$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt{1+bx}}{x}$.
8. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0.$$

V následujících dvou příkladech se vám bude hodit věta o limitě složené funkce (neboli jak používat substituci).

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$, (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)} x^k$, (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x - x^2)}{x}$, (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x - x + \frac{x^3}{6})}{x}$,
- (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1})$.

10. S využitím vlastností exponenciální a logaritmické funkce spočítejte následující limity ($\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$)

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x}$, (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$, (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\log(1+\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})}$, (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}$,

11. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ lze funkci

$$f(x) = x^a (\arcsin x - \operatorname{arctg} x)$$

spojitě rozšířit na \mathbb{R} . Totéž zjistěte pro funkci

$$g(x) = x^a - \sin(\log x) \cdot \operatorname{arctg} x.$$

12. Spočítejte limity posloupností. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sin \frac{1}{n} \right)$,
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(2 \cos \frac{1}{n^2} - 3 + \sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} \right)$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^{-2} + e^{1/n})}{\log(n^{-4} + e^{2/n})}$.

Derivace

Co je to derivace? Jak se spočítá derivace součtu, součinu, podílu funkcí? Derivace složené funkce, inverzní funkce? Jaké jsou derivace elementárních funkcí?

13. Spočítejte derivace následujících funkcí.

- (a) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sin \frac{x+1}{x^2+1}$, $\cos \ln x$, $\ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$
 (b) x^x , $(1/x)^{1/x}$, $(\sin x)^{\cos x}$
 (c) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$, $\ln \arccos x$, $\arcsin \sin x$

14. Vypočítejte derivaci funkcí

(a)

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle \\ \frac{1}{e} & \text{pro ostatní } x \end{cases}$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{pro } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}$$

15. Spočítejte derivace $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geq 1$) jednak přímo, jednak pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

16. (a) Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?

(b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

17. Dokažte a zapamatujte si následující nerovnosti.

(a) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \geq 1 + x$.

(b) pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin x \leq x$.

18. $(1 + 1/x)^x$ je rostoucí funkce ($x \in \mathbb{R}^+$).