

## 8. cvičení z MA—8. a 10.12.2008

### Řady

Podle příkladů pana Picka.

### Funkce

Co je to funkce? Jaké vlastnosti funkcí znáte a umíte zkoumat? Uveďte zajímavé příklady funkcí!

1. Dokažte, že funkce  $f$  je na intervalu  $I$  rostoucí, právě když platí

$$(\forall x, y \in I) x \neq y \implies \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0.$$

2. Je-li  $f$  neklesající na  $(-\infty, a)$  a nerostoucí na  $\langle a, \infty$  pro nějaká  $a \in \mathbb{R}$ , pak  $f$  nabývá maxima.

3. Necht'  $f$  nabývá minima v  $a \in \mathbb{R}$ . Musí pak existovat  $\varepsilon > 0$  takové, že  $f$  je nerostoucí na  $(a - \varepsilon, a)$  a neklesající na  $\langle a, a + \varepsilon)$ ?

4. Které z následujících operací provedených na neklesající (monotónní) funkce dávají opět neklesající (monotónní) funkci?

Operace:  $+$ ,  $-$ ,  $\max$ ,  $\min$ ,  $\circ$ .

Existuje funkce, která není monotónní na žádném intervalu?

---

Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:

5.

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{2x^3 - x - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{2x^3 - x - 1}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{[x]}$ ,

(d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} ([x] - x)$ ,

(e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x})$ ,

(f) Najděte  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0.$$