

5. cvičení z MA — 3. a 5.11.2008

(na 4. cvičení jsme počítali příklady z papíru ke třetímu cvičení)

Další limity

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n$ 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2n^n + n!}{(n+1)^4 + \sin n + (3n)!}$

4.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}})$

5. Spočítejte v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$.

6.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{n^2}$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n^2)^n$

7. Dokažte, že součin $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \dots$ má konečnou nenulovou hodnotu.

8. Čemu se rovná $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$?

9. * Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k a_i \sqrt{n+i} = 0$, pokud $\sum_{i=0}^k a_i = 0$.

10. * Pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx$? Totéž pro $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx$.

11. Rekurentně zadané posloupnosti — vypočítejte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (a nezapomeňte si rozmyslet, zda limita vůbec existuje) pro

(a) $a_1 = t$ ($t > 0$ je parametr), $a_{n+1} = (a_n + 2/a_n)/2$,

(b) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$,

(c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$.

(d) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$

(e) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + (x - a_n)^2/2$ ($0 \leq x \leq 1$)

(f) (Jako varování!) $a_1 = 0.4$, $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$.

12. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(a) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = 0$.

(b) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = +\infty$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/|a_n| = +\infty$.

(d) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$.

(e) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{b_n} = A$ pro každou rostoucí posloupnost přirozených čísel b_n .

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{b_n} = A$ pro každou neklesající posloupnost přirozených čísel b_n .

13. Co je to limes superior/inferior? Jak souvisí s limitou, se supremem/infimem? Určete limes superior i inferior posloupností $(n-1)/n$, $(-1)^n$, $(-1)^n - 1/n$, $5^{(-1)^n} 3^n$.