

### 3. cvičení z MA — 20. a 21.10.2008

#### Suprema a infima

Napřed si zopakujte definici suprema a infima, rozdíl oproti maximu a minimu, uveďte jednoduchý příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Naleznete množinu, která nemá supremum?

Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima? (Dohodněme se, že  $\mathbb{N}$  značí množinu  $\{1, 2, 3, \dots\}$ , zatímco  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .)

1.

(a)  $A_1 = \{(n-1)/n; n \in \mathbb{N}\}$ ,

(b)  $A_2 = \{p/(p+q); p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$ ,

2.

(a)  $B_1 = \{\sin x; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ ,

(b)  $B_2 = \{\sin x; x \in (0, 2\pi)\}$ ,

(c)  $B_3 = \{\sin x; x \in (0, \pi)\}$ ,

3.

(a)  $C_1 = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ ,

(b)  $C_2 = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n > m\}$ ,

(c)  $C_3 = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ ,

4.

(a)  $D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ ,

(b)  $D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{Z}\}$ ,

5.  $E = \{5^{(-1)^j 3^k}; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$ .

6.

(a)  $F_1 = \{\cos(n + 1/n)\pi; n \in \mathbb{N}\}$ ,

(b)  $F_2 = \{\cos(n + 1/n)\pi; n \in \mathbb{N} \text{ sudé}\}$ ,

(c)  $F_3 = \{\cos(n + 1/n)\pi; n \in \mathbb{N} \text{ liché}\}$ .

#### Limity posloupností

Co říká definice limity? Spočítejte přímo podle definice limitu posloupností  $(\frac{1}{1+n^2})_{n=1}^{\infty}$  a  $(\frac{n+1}{n+2})_{n=1}^{\infty}$ . Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují). Budou se vám k tomu hodit (mimo snad první příklad) věty o aritmetice limit.

7.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ ,

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n$ ,

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$ ,

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n$ .

8.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2}$ ,

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}$ ,

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7}$ ,

(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1}$ .

9.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ,
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n})$ ,
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ .

10.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$ ,
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$ ,
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$ .

---

Maličko přivrđíme ... Budeme používat též větu o policajtech.

11.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$ , ( $a \geq 0$ ),
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ .

12.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a + n^{a-1} + \dots + n + 1}{n^b + n^{b-1} + \dots + n + 1}$  ( $a, b \in \mathbb{N}$  parametry)
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1}{b^n + b^{n-1} + \dots + b + 1}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$  parametry,  $|a|, |b| < 1$ )

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$ ,

14.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n$  ( $q > 0$  je parametr),
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!}$ ,
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$ ,
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^3}$ ,
- (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$ ,
- (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n}$  (kde  $A, B, C > 0$ ),
- (g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$ .

15.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ ,
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor}{n^2}$  (parametr  $x \in \mathbb{R}$ ),
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ .