Zkoušky z NMAI055, zkoušející Šámal, letní semestr 2008/2009

Obecné podmínky

Zkoušku mohou skládat pouze studenti, kteří mají předmět NMAI055 zapsaný v letním semestru 2008/2009.

Nutnou podmínkou ke skládání zkoušky je získání zápočtu – před písemnou částí zkoušky.

Zkouška se skládá z písemné a ústní části, písemná část předchází ústní části. Pokud student neuspěl u písemné části, neprospěl u tohoto termínu. (Pokud se student zúčastní písemky a neodevzdá ji, získal 0 bodů.) Pokud student uspěl u písemné části, skládá ústní zkoušku. Při druhém opravném termínu (tedy třetím termínu zkoušky) postupují k ústní zkoušce všichni studenti. Neprospěje-li student u ústní zkoušky, neprospěl u tohoto termínu.

Pokud student při ústní zkoušce neuspěje a absolvoval písemnou část s méně než 40 body, opakuje při opravném termínu písemnou i ústní část zkoušky. Pokud získal za písemnou část alespoň 40 bodů, může opakovat pouze ústní část zkoušky.

Během semestru se koná dobrovolná bonifikační písemka, která obsahuje tři příklady a za každý lze získat maximálně 5 bodů. Součet bodů z dobře vyřešených příkladů (tedy z příkladů, za které získal student alespoň 4 body) se započítává do hodnocení písemné části zkoušky. Maximální počet bodů za písemnou část (zkoušková písemka+body z bonifikační písemky) je 50 bodů.

Písemná část zkoušky

Písemná část zkoušky se skládá ze tří příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Příklady jsou vybrány z okruhů

1) Hledání primitivní funkce
2) Výpočet určitého integrálu
3) Aplikace určitého integrálu na spočtení obsahu, objemu, povrchu, délky křivky
4) Hledání extrémů funkce více proměnných

Písemná čast trvá 120 minut. Během písemky nelze používat mobilní telefony, kalkulačky ani jinou výpočetní techniku.

Je možné používat tahák v rozsahu A4ky (oboustranně) popsané vlastní rukou.

Při písemné i ústní části zkoušky se student prokáže dokladem s fotografií. Student uspěje u písemné části, pokud součet bodů získaných za bonifikační písemky a za písemnou část zkoušky je alespoň 30 bodů. ($\geq$ 27 bodů znamená částečný úspěch, viz níže.)

Vzor zadání písemky

1) Spočtěte $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ pro

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x - 2\sin^4 x} & \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \\ \frac{1}{3} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2) Spočtěte objem průniku koule a válce

$$A = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ y^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

3) Nalezněte minumum a maximum funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině

$$M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x+y+z = 0\right\}.$$

(Výsledky: 1) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, 2) $\frac{-\left(12\sqrt{3}-32\right)\pi}{3}$, 3) $\pm\frac{1}{3\sqrt{6}}$.)

Ústní část zkoušky

Ústní část zkoušky se koná zpravidla následující den/dny po části písemné. Student si vylosuje sadu čtyř otázek. Po zhruba 30 minutách na přípravu začíná zkoušení. Pokud nemá student ještě nějaké otázky vypracované, tak dostane po prozkoušení již připraveného čas na jejich dokončení. K vypracování odpovědí nelze používat jiné pomůcky než psací potřeby. Odpovědi jsou zhodnoceny a obodovány zkoušejícím.
Skladba otázek a počty bodů :
1) Klíčový pojem (neboduje se)
2) Tři definice nebo znění věty (každá otázka za 5 bodů)
3) Lehká věta a důkaz (5 bodů za znění a 10 bodů za důkaz)
4) Těžká věta a důkaz (5 bodů za znění a 15 bodů za důkaz)

Seznamy klíčových pojmů, definic, lehkých a težkých vět budou k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic, respektive vět, se považuje jejich porozumění a schopnost je používat.

Vzor zadání otázek

1) (0 bodů)
   - Definujte metrický prostor a uveďte příklad.
2) (15 bodů)
   - Definujte primitivní funkci.
   - Definujte stejnoměrně spojitou funkci.
   - Vyslovte větu o postačující podmínce pro lokální extrém.
3) (15 bodů)
   - Vyslovte a dokažte větu: per partes pro určitý integrál.
4) (20 bodů)
   - Vyslovte a dokažte větu: nabývání extrémů spojité funkce na kompaktní množině.

Celkové hodnocení zkoušky

1) Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu.

2) Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 30 bodů z písemné zkoušky, alespoň 30 bodů z ústní zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu.

3) K celkovému hodnocení známkou výborně je potřeba získat alespoň 90 bodů, z toho alespoň 30 bodů za písemnou a alespoň 30 bodů za ústní část.

4) K celkovému hodnocení známkou velmi dobře je potřeba získat alespoň 75 bodů, z toho alespoň 30 bodů za písemnou a alespoň 30 bodů za ústní část.

Pokud student získá alespoň 27 bodů, postupuje k ústní zkoušce podmínečně v takzvané šedé zóně. V tomto případě musí student na začátku ústní zkoušky nejprve spočítat nějaké příklady a teprve poté následuje ústní zkoušení, které je přísnější než u standardní zkoušky. Z ústní zkoušky je potřeba získat alespoň 31–33 bodů, aby byl součet písemné a ústní části alespoň 60 bodů.

Seznam klíčových pojmů.

- Taylorův polynom
- primitivní funkce
- dělení intervalu, horní a dolní součet
- horní a dolní Riemannův integrál
- Newtonův integrál
- funkce n reálných proměnných
- parciální derivace
- totální diferenciál a gradient funkce
- metrický prostor
- otevřená/uzavřená množina v metrickém prostoru
- konvergentní posloupnost bodů v metrickém prostoru
- kompaktní množina v metrickém prostoru
- spojitost funkce mezi metrickými prostory

Definice. Viz seznam klíčových pojmů a dále:

- racionální funkce
- zjemnění dělení
- norma dělení
- stejnoměrně spojitá funkce
- délka křivky
- otevřená/uzavřená množina v $\mathbb{R}^n$
- limita funkce n reálných proměnných
- druhá parciální derivace
- derivace funkce ve směru
- otevřená/uzavřená koule v metrickém prostoru
- ekvivalentní metriky
- limita funkce mezi metrickými prostory

Věty bez důkazu. Zkouší se jen znění a porozumění.

- Jensenova nerovnost
- o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem
- Taylor s Lagrangeovým tvarem zbytku
- Cauchyova věta o střední hodnotě
- základní věta algebry
- vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti
- vlastnosti Riemannova integrálu
- substituce pro určitý integrál
- délka křivky v $\mathbb{R}^n$
- objem a povrch rotačního tělesa
- postačující podmínka pro lokální extrém
- o aritmetice totálního diferenciálu
- diferenciál složeného zobrazení
- Lagrangeova věta o vázaných extrémech
- charakterizace spojitosti zobrazení mezi metrickými prostory

Lehké věty.

- AG nerovnost
- jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu
- linearita primitivní funkce
- integrace per partes
- o zjemnění dělení
- o dvou děleních
- vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti

- per partes pro určitý integrál
- aproximace součtů pomocí integrálů
- integrální kritérium konvergence řad
- nutná podmínka pro lokální extrém
- tvar totálního diferenciálu
- vlastnosti otevřených množin
- vlastnosti uzavřených množin
- vlastnosti konvergence v metrických prostorech
- charakterizace uzavřených množin
- vlastnosti kompaktních množin

Těžké věty.

- vztah spojitosti a existence primitivní funkce
- substituce při výpočtu primitivní funkce
- rozklad na parciální zlomky
- kritérium existence Riemannova integrálu
- vztah spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti
- derivace integrálu podle horní meze
- vzorec pro délku křivky
- charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$
- nabývání extrémů spojité funkce na kompaktní množině

Poznámka k důkazům: Některé věty jsme dokazovali jen zčásti (např. jednu nerovnost u vzorce pro délku křivky, atd.); v poznámkách o probrané látce by to mělo být uvedeno. Takové důkazy stačí umět také jen z příslušné části.