1. bonifikační písemka – 17.4.2009

1. Spočtěte následující integrál

$$\int_e^\infty \frac{2 + 3\log(x)}{6x\log x + 5x(\log x)^2 + x(\log x)^3}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Nalezněte primitivní funkci k

$$\frac{\sin^2 x + 2\cos^4 x}{4 - \cos^2 x}$$

na maximálním možném intervalu.

3. Spočtěte délku křivky $y = e^x$, pro $x \in [0, 1]$.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.
Na vypracování máte 90 minut.
Za každý příklad můžete získat 5 bodů. Pokud za příklad získáte alespoň 4 body, budou se vám započítávat do skóre u zkouškové písemky.
Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, … (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

U 3. vede k celkem přirozená (navíc standardní) subst.

U 1 je třeba dát pozor, že

$$\int_a^b f = [F]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

2 byl asi nejtěžší — zvolí se subst. tg x, v rozkladu na parc. zlomky je vhodné využít toho, že všude jsou sudé mocniny.
Na závěr je ještě třeba "lepit".

3) délka e^x na $[0,1]$

$$\int_0^1 \sqrt{1+((e^x)')^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

$$t = e^{2x} \qquad t(0) = 1$$

$$dt = 2e^{2x}\,dx \qquad t(1) = e^2$$

$$= \int_1^{e^2} \sqrt{1+t}\cdot\frac{dt}{2t} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{s}{\cancel{2}(s^2-1)}\,\cancel{2}s\,ds$$

$$s \colon (1, e^2) \xrightarrow{\text{na}} (\sqrt{2}, \sqrt{1+e^2})$$

$$s = \sqrt{1+t}$$

$$t = s^2 - 1$$

$$dt = 2s\,ds$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} 1 + \frac{1}{s^2-1}\,ds$$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1}$$

$$= \left[s + \frac{1}{2}\ln|s-1| - \frac{1}{2}\ln|s+1| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

$$= \boxed{\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

① $$\int_e^{\infty} \frac{2+3\log x}{6x\log x + 5x(\log x)^2 + x(\log x)^3}\,dx$$

$t = \log x \qquad t(e) = 1$

$dt = \frac{1}{x}\,dx \qquad t(\infty) = \infty$

$$= \int_1^{\infty} \frac{2+3t}{6t+5t^2+t^3}\,dt =$$

$\frac{2}{6} \qquad \frac{-4}{-2\cdot 1} \qquad \frac{2-9}{-3\cdot -1}$

$$\hookrightarrow = \frac{3t+2}{t(t+2)(t+3)} = \frac{1/3}{t} + \frac{2}{t+2} + \frac{-7/3}{t+3}$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln|t| + 2\ln|t+2| - \frac{7}{3}\ln|t+3|\right]_1^{\infty}$$

$$= \Big[\underbrace{\ln\frac{t^{1/3}\cdot(t+2)^2}{(t+3)^{7/3}}}_{F(t)}\Big]_1^{\infty} = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(1)$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \ln \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1/3}(t+2)^2}{(t+3)^{7/3}} = 0 \qquad \underline{\underline{= \frac{7}{3}\ln 4 - 2\ln 3}}$$

$$F(1) = \frac{1}{3}\ln 1 + 2\ln 3 - \frac{7}{3}\ln 4$$

(2) $$\int \frac{\sin^2 x + 2\cos^4 x}{4 - \cos^2 x}\, dx$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$$

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

$$\frac{1}{\cos^2} - 1 = t^2 \Rightarrow \cos^2 = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin^2 = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\int \frac{\frac{t^2}{t^2+1} + 2\frac{1}{(t^2+1)^2}}{4 - \frac{1}{t^2+1}} \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= \int \frac{t^4 + t^2 + 2}{4(t^4+2t^2+1) - t^2 - 1} \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= \int \frac{t^4 + t^2 + 2}{4t^4 + 7t^2 + 3} \frac{1}{t^2+1}\, dt = \longrightarrow$$

$$(t^2+1)\quad(4t^2+3)$$

$$\frac{t^4 + t^2 + 2}{4t^4 + 7t^2 + 3} = \frac{1}{4} + \frac{-\frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{4}}{4t^4 + 7t^2 + 3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{-2}{t^2+1} + \frac{\frac{29}{4}}{4t^2+3}$$

$$\frac{8/4}{-1}$$

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{4}}{1/4} = \frac{9}{4} + 5 = \frac{29}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1} - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2} + \frac{29}{4}\int \frac{1}{(t^2+1)(4t^2+3)}$$

$$= \frac{1}{4} I_1 - 2 I_2 + \frac{29}{4} I_3$$

$$I_1 = \operatorname{arctg} t$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 1 = \frac{t}{t^2+1} + \int \frac{+2t}{(t^2+1)^2}\cdot t$$

$$= \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(t^2+1)^2} = \frac{1/2\, t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} t}{t^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t$$

$$I_3 = \int \frac{1}{(t^2+1)(4t^2+3)} = \int \frac{-1}{t^2+1} + \int \frac{4}{4t^2+3}$$

$$= -\operatorname{arctg} t + I_4$$

$$I_4 = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}t^2+1}\, dt = \sqrt{\frac{4}{3}} \int \frac{1}{s^2+1}$$

$$s = \sqrt{\frac{4}{3}}\, t \qquad = \underline{\sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4}{3}}\, t}$$

$$ds = \sqrt{\frac{4}{3}}\, dt$$

$$\frac{1}{4} I_1 - 2 I_2 + \frac{24}{4} I_3 = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t$$

$$- \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t$$

$$+ \frac{24}{4}\left(-\operatorname{arctg} t + \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\, t\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t$$

$$- \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t$$

$$+ \frac{29}{4} \left(- \operatorname{arctg} t + \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\, t\right)\right)$$

$$= \frac{-32}{4} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{t^2+1} + \frac{29}{4} \sqrt{\frac{4}{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\, t\right)$$

$t = \operatorname{tg} x$

$$\boxed{= -8x - \frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x)^2 + 1} + \frac{29}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x\right) + C_k}$$

$= F_k(x)$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} F_k(x) = -8\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - 0 + \frac{29}{2\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + C_k$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right)^+} F_{k+1}(x) = -8\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - 0 + \frac{29}{2\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) + C_{k+1}$$

$$\Rightarrow \underline{C_{k+1} = C_k + \frac{29}{2\sqrt{3}} \pi}$$

Závěr: primitivní fce na $\mathbb{R}$ je dána vzorcem

$$F(x) = -8x - \frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x)^2 + 1} + \frac{29}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x\right) + \frac{29}{2\sqrt{3}} \pi \cdot k + C$$

pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$

$$F(x) = -8x + \frac{29}{2\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + \frac{29}{2\sqrt{3}} \pi k + C$$

pro $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
