

Stručné poznámky z MA pro I — LS 2008/9

Robert Šámal

8. června 2009

Tento text se vztahuje k předmětu NMAI055, paralelka Y (a části pův. par. Z). Vznikl (vzniká) úpravou textu z loňska od Stanislava Hencla (děkuji!). Najdete zde soupis definic, vět a něco málo dalších poznámek. Co zde naopak není, jsou důkazy. (Avšak pokud důkaz na přednášce nebyl, je to zde napsáno.) Pokud jste důkaz “nechytili” na přednášce, poraďte se s kolegou nebo doporučenou literaturou. Pomocí vodorovných čar jsou odděleny jednotlivé přednášky.

Pokud narazíte na nějakou nesrovnalost, dejte mi prosím vědět. (Zatím se s připomínkami ozvali Dušan Rychnovský, Ondřej Kupka, Ondřej Pilát, Martin Hanes, Roman Říha, Martin Petruňa, Ondřej Odcházal. Děkuji!)

4.7 Průběh funkce

Poznámky o tom, k čemu je dobré zkoumat průběh funkce. Zjevně užitečné je najít minimum nějaké funkce. Někdy se hodí i složitější vlastnosti:

Věta 4.1 (Jensenova nerovnost). *Nechť f je funkce konvexní na intervalu J . Nechť x_1, \dots, x_n jsou prvky J , nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou kladná čísla se součtem 1. Pak*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

(Pro konkávní funkce platí nerovnost opačná.)

(Důkaz jen na obrázku – přes těžiště. **K zamyšlení:** Rozmyslete si, že to funguje!)

L Věta 4.2 (AG-nerovnost). *Nechť x_1, \dots, x_n jsou z $[0, \infty)$. Pak*

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

K zamyšlení: Jak známo, pravá strana výše uvedené nerovnosti se nazývá *aritmický průměr*. O něco méně známo je, že levá strana se nazývá *geometrický průměr*. Zkuste najít (aspoň pro $n = 2$) geometrický význam tohoto čísla.

4.8 Taylorův polynom

Často je užitečné umět číslo, např. $\sin 0.1$ aproximovat přiměřeně přesně pomocí nějakého snadno vyčíslitelného výrazu.

Definice. *Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní n -tá derivace f v bodě a . Pak polynom*

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a .

Věta 4.3 (o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n . Pak*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

(Bez důkazu, ten by se dělal opakovaným použitím l'Hospitalova pravidla.)

Poznámka. *Ekvivalentní formulace: “za vhodných předpokladů” je*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x - a)^n).$$

- $f = o(g)$ pokud $\forall c > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) \quad f(x) \leq cg(x)$, a také
- $f = O(g)$ pokud $\exists C > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) \quad f(x) \leq Cg(x)$.
- Symboly ω , Ω , θ , Θ definujeme analogicky, jak nejspíš znáte odjinud.

Věta 4.4 (Taylor s Lagrangeovým tvarem zbytku). *Nechť funkce f má vlastní $(n + 1)$ -ní derivaci v intervalu $[a, x]$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ tak, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}.$$

(Bez důkazu.)

Poznámka. 1) Čili v $(n + 1)$ -ním členu místo x píšeme ξ pro vhodné ξ .

2) Pro rozumné funkce tento odhad vylepšuje výše uvedené lemma, neboť říká, že $f(x) = T_n^{f,a}(x) + O((x - a)^{n+1})$.

3) Zejména však tato věta umožňuje odhadnout, jaké chyby se pro konkrétní x dopouštíme. (oproti Větě 4.3, která dává jen limitní výsledek). Můžete tedy např. odhadnout $\sin 0.1$ pomocí (ověřte!) $0.1 - 0.1^3/3!$ s chybou maximálně $0.1^5/4!$.

Při důkazu Taylorovy věty (a také dříve, při důkazu l'Hospitalova pravidla (**K zamyšlení:** zkuste!)), se dá použít následující věta.

Věta 4.5 (Cauchyova věta o střední hodnotě). *Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ takové, že f má v každém bodě (a, b) derivaci a g má v každém bodě vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

(Bez důkazu.)

5 Primitivní funkce

Motivační otázka: když víme pro každý čas přítok vody do bazénu, jak zjistit, kolik v něm bude vody za hodinu (pokud se přítok mění)? jak zjistit obsah pod sinusoidou (řekněme na intervalu $[0, \pi]$)?

Podívejme se podrobněji na druhý problém: Jeden přístup je “brutálně informatičký”: sinus nasamplujeme, třeba pravidelně, a správně sečteme. Pokud bude krok samplování $x = \pi/n$, dostaneme součet

$$x(\sin 1x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx).$$

Podle vzorce, který snad znáte ze cvičení v ZS je tento součet roven

$$x \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Spočteme-li limitu pro $x \rightarrow 0$, dostaneme snadno (**K zamyšlení:** overte!), že samplované součty se blíží ke 2.

Tento postup dává správný výsledek, má však dvě vady: Jednak, není jasné, jestli naše volba samplování výsledek neovlivnila. (**K zamyšlení:** Vymyslete funkci, která pomocí výše uvedeného postupu má “součet” 0, ale přitom to vypadá, že by spíš měla mít “součet” 1. Tip: neměla by být spojitá!) Toto však vyjasníme, až budeme zkoumat tzv. Riemannův integrál. Vážnější vada je to, že jsme uměli sečíst příslušný výraz s n siny jen díky klice ...

Půjdeme tedy na to jinak, plochu budeme zkoumat obecněji pod křivkou sinus na intervalu $[0, x]$ (to se bude značit $\int_0^x \sin x \, dx$). Všimneme si, že rychlost, kterou tato plocha přibývá je (v bodě x) rovna $\sin x$. Čímž jsme zpátky u první otázky s přítokem vody do bazénu, nebo obecněji u primitivní funkce.

5.1 Základní vlastnosti

Definice. *Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I . Řekneme, že funkce F je primitivní funkce k funkci f , pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$.*

L Věta 5.1 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu). *Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G(x) = F(x) + c$ pro všechna $x \in I$.*

Poznámka. *Takže, známe-li jednu primitivní funkci F k f , známe všechny: je to množina $\{F(x) + C; C \in \mathbb{R}\}$. Tuto množinu značíme $\int f(x) \, dx$. Píšeme*

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C.$$

T Věta 5.2 (o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce). *Nechť I je otevřený interval a f je spojitá funkce na I . Pak f má na I primitivní funkci.*

(Zatím bez důkazu.)

Poznámka. 1) *Funkce signum nemá na \mathbb{R} primitivní funkci.*

2) *Obecněji: Pokud f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci, pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subset I$ je $f(J)$ interval. (Jinak řečeno: nabývá mezíhodnot.) **K zamyšlení:** Zkuste se přemluvit, že by to tak mělo být, tj. že derivace libovolné funkce má Darbouxovu vlastnost.*

3) *Funkce e^{-x^2} je spojitá na \mathbb{R} , takže podle Věty 5.2 má na \mathbb{R} primitivní funkci. Tato funkce ale nejde vyjádřit pomocí elementárních funkcí (sinus, cosinu, exponenciála, logaritmus, ...). Protože tato primitivní funkce je užitečná (ve statistice), zavádí se tzv. chybová funkce*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt.$$

(Co je \int_0^x jsme ještě nedefinovali, vydržte :-)

4) *Primitivní funkce k jakékoli funkci má všude vlastní derivaci, tedy je spojitá.*

5) **K zamyšlení:** *Zkuste vymyslet nespojitou funkci, která má primitivní funkci. Jinak řečeno, najděte funkci (třeba na \mathbb{R}), která má v každém bodě derivaci, avšak tato derivace není spojitá.*

L Věta 5.3 (linearita primitivní funkce). *Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na otevřeném intervalu I a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha f + \beta g$ má na I primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.*

T Věta 5.4 (o substituci při výpočtu prim. funkce). *(i) Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) . Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b) , která má v každém bodě $z \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

(ii) Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) vlastní nenulovou derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = G(t) \quad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) \quad \text{na } (a, b).$$

(V důkazu druhé části jsme použili (a nedokázali), že φ musí být monotónní.)

Příklad. 1) $\int \sin 2t dt$: Vezmeme $f(x) = \sin x$, $\varphi(t) = 2t$, $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. Víme, že primitivní funkce k $f(x)$ je $F(x) = -\cos x$. Podle první části věty tedy platí, že $\int \sin 2t dt = \frac{1}{2} \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = -\frac{1}{2} \cos 2t$.

2) $\int te^{-t^2}$: Na tomto příkladu si ukážeme jiný zápis; méně formální, avšak praktičtější:

- substituujeme $x = -t^2$ (podrobněji, x je funkce t , a $x(t) = -t^2$).
- Platí $x'(t) = -2t$. Můžeme psát $\frac{dx}{dt} = -2t$, neboli
- $dx = -2t dt$.
- Můžeme tedy psát (protože "by to tak mělo být", resp. protože to plyne z věty o substituci, kde ověříme podmínky na funkci $x(t) = \varphi(t)$):

$$\int te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int e^{-t^2} (-2t) dt = -\frac{1}{2} \int e^x dx = -\frac{1}{2} e^x + C = -\frac{1}{2} e^{-t^2} + C$$

L Věta 5.5 (integrace per partes). *Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I . Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce k g na I . Pak platí*

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \quad \text{na } I.$$

K zamyšlení: Nakreslete výstižný obrázek!

Příklad. $\int xe^x dx$

5.2 Integrace racionálních funkcí

Definice. Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů P/Q , kde Q není nulový polynom.

Věta 5.6 (základní věta algebry). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Pak existují čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ tak, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Bez důkazu.)

K zamyšlení: Stačí najít jedno $x_1 \in \mathbb{C}$, pro něž $P(x_1) = 0$. Pak $P(x) = (x - x_1)Q(x)$ pro nějaký polynom $Q(x)$ (je to jasné?) a můžeme užít indukci.

K zamyšlení: Věta by se dala dokázat např. takto: zkusíme x vyjádřit ve tvaru $x = Re^{it}$, kde R je reálné a $t \in [0, 2\pi]$. Jako jeden extrém dosadíme $R = 0$, jako druhý extrém R hodně velké (a t necháme probíhat interval $[0, 2\pi]$). Co můžete říct o hodnotách $P(x)$ pro takovéto volby x ? Plyne odsud něco pro hodnotu $P(x)$ v bodech mezi?

Věta 5.7 (o komplexních kořenech polynomů). *Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbb{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak \bar{z} je kořen násobnosti k .*

(Bez důkazu.)

Z předešlé věty plyne, že každý polynom Q lze psát ve tvaru, jaký požaduje následující důležitá věta.

T Věta 5.8 (o rozkladu na parciální zlomky). *Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

- (i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q ,*
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- (iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,
- (iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,
- (v) *žádné dva z mnohočlenů $x - x_1, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen.*
- (vi) *mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_j^i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, p_i\}$ a $B_j^i, C_j^i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, l\}$, $j \in \{1, \dots, q_i\}$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_1^k}{x - x_k} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}. \end{aligned}$$

(Důkaz jen pro případ, kdy $Q(x)$ má všechny kořeny reálné.)

Jak tedy integrovat racionální funkci?

1. Částečně vydělíme, čímž dostaneme polynom a zlomek, v němž číselník má nižší stupeň než jmenovatel.
2. Tento zlomek podle výše uvedené věty rozložíme na součet parciálních zlomků.
3. S těmi naložíme následujícím způsobem:

- $\int \frac{1}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C$
- (pro $k > 1$) $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} = \frac{1}{-k+1} \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}$
- $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C$ (substituce)
- (pro $k > 1$) $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} = \frac{1}{-k+1} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + C$
- $\int \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$
- (pro $k > 1$) $\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}} = \frac{1}{2k} \frac{x}{(1+x^2)^k} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \int \frac{1}{(1+x^2)^k}$
- Integrály s obecným kvadratickým vzorcem ve jmenovateli a konstantou v číselníku zvládneme úpravou na čtverec:

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - (p/2)^2) = k \left(\left(\frac{x + p/2}{\sqrt{k}} \right)^2 + 1 \right)$$

(kde značíme pro jednoduchost $k = q - (p/2)^2$). Pak substitucí $u = \frac{x+p/2}{\sqrt{k}}$ to převedeme na jeden z předchozích dvou typů. Tím dostaneme následující

- $\int \frac{1}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \right)$

5.3 Integrace trigonometrických funkcí

Definice. Racionální funkci dvou proměnných rozumíme podíl dvou polynomů $R(a, b) = \frac{P(a, b)}{Q(a, b)}$, kde $P(a, b)$ a $Q(a, b)$ jsou polynomy dvou proměnných a Q není identicky nulový.

(1) Při integraci funkcí

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

používáme substituce:

1. pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \cos x$.
2. pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \sin x$.
3. pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Bude se nám hodit, že $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ a $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$. Tudíž $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.
4. vždy funguje substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Bude se nám hodit, že $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Tudíž $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Dobrá rada: Pokud je možné použít (i) nebo (ii), je výpočet většinou nejsnazší. Substituci (iv) je dobré používat jen, když nelze použít (i), (ii) ani (iii).

Poznámka: Po substituci $t = \tan x$ a $t = \tan \frac{x}{2}$ je většinou nutné primitivní funkci po formálním spočtení ještě 'lepit'.

5.4 Integrace funkcí obsahujících odmocniny

(2) Necht $q \in \mathbb{N}$ a $ad \neq bc$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

používáme substituci

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bude se nám hodit, že $x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$, a tudíž

$$dx = qt^{q-1} \frac{ad - bc}{(a - ct^q)^2} dt.$$

5.5 Eulerovy substituce

(3) Necht $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

používáme následující substituce:

a) Polynom $ax^2 + bx + c$ má dvojnásobný kořen α a $a > 0$, pak

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - \alpha|$$

a jedná se v podstatě o integraci běžné racionální funkce.

b) Polynom $ax^2 + bx + c$ má dva reálné kořeny α_1 a α_2 . Pak úpravou převedeme na tvar (2) pro odmocninu $\sqrt{a \frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a \frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}}$.

c) Polynom $ax^2 + bx + c$ nemá reálný kořen a $a > 0$. Pak použijeme substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t.$$

Po umocnění na druhou dostaneme $ax^2 + bx + c = ax^2 + 2t\sqrt{a}x + t^2$. Odsud snadno vyjádříme $x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}$, tedy i spočteme $dx = \left(\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}\right)' dt$.

Poznámka. Stejně dobře by fungovala substituce $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$.

5.6 Ostatní substituce

(4) Necht $a \in \mathbb{R}$. Při integraci funkcí typu

$$\int R(e^{ax}) dx$$

používáme substituci

$$t = e^{ax}, \quad dt = ae^{ax} dx$$

(5) Při integraci funkcí typu

$$\int R(\log x) \frac{1}{x} dx$$

používáme substituci

$$t = \log x, \quad dt = \frac{1}{x} dx$$

6 Určitý integrál

6.1 Riemannův integrál

Nyní se konečně dostaneme k tomu, jak měřit plochu.

Definice. Konečnou posloupnost $(x_j)_{j=0}^n$ nazýváme dělením intervalu $[a, b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ zjemňuje dělení D intervalu $[a, b]$, jestliže každý bod dělení D je i bodem dělení D' .

Poznámka. Podle definice může být $D = D'$. To je trochu divné jazykově, ale přirozenější matematicky.

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a D je dělení $[a, b]$. Definujme horní a dolní součty

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^n \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$
$$s(f, D) = \sum_{j=1}^n \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$

horní Riemannův integrál

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \inf\{S(f, D); D \text{ je dělení } [a, b]\}$$

a dolní Riemannův integrál

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \sup\{s(f, D); D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

Pokud $(R) \int_a^b f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx$, pak řekneme, že f je Riemannovsky integrovatelná a klademe

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Množinu funkcí majících Riemannův integrál značíme $R([a, b])$.

K zamyšlení: Najděte (co “nejjednodušší”) funkci na $[0, 1]$, která má dolní integrál 0 a horní integrál 1.

L Věta 6.1 (o zjemnění dělení). Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$, D a D' jsou dělení intervalu $[a, b]$ a D' zjemňuje D . Pak

$$s(f, D) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D).$$

L Věta 6.2 (o dvou děleních). Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2).$$

Definice. Nechť $D = (x_j)_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Číslo $\nu(D) = \max_{j=1, \dots, n} |x_j - x_{j-1}|$ nazveme normou dělení D .

Příklad. Spočtěme podle definice Riemannův integrál z $f(x) = x^2$ na $[0, 1]$. Zvolíme-li dělení $D_n = (x_j)_{j=0}^n$, je horní součet $S(f, D_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3n^3}$. To je o něco víc než $1/3$, a zjevně je $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = 1/3$.

Obdobným součtem (rozmyslete) dostaneme dolní součet $s(f, D_n) = \frac{n(n-1/2)(n-1)}{3n^3}$. Opět je limita $1/3$, tentokrát je to o něco méně.

1) **K zamyšlení:** Rozmyslete si, zda odsud už plyne, že $(R) \int_0^1 x^2 dx = 1/3$. (V definici je supremum, resp. infimum přes všechna dělení – nevadí to?)

2) **K zamyšlení:** Rozmyslete si, zda tento postup (zvolíme jednu posloupnost dělení) musí fungovat, nebo zda jsme měli kliku.

2) Jak vidíme, jde to, ale ne úplně pohodlně. Cílem této definice není ani tak aby se podle ní přímo počítalo, jako to, abychom měli jasně dáno, jak jde počítat obsah plochy.

Věta 6.3 (aproximace R. integrálu pomocí součtů). *Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$ a $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení $[a, b]$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$. Potom*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \inf_{n \in \mathbb{N}} S(f, D_n),$$

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \sup_{n \in \mathbb{N}} s(f, D_n).$$

(Bez důkazu.)

Poznámka. Takže pokud za stejných předpokladů na D_n víme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = A$, je i integrál $(R) \int_a^b f(x) dx$ roven A . Pokud bychom věděli, že funkce má Riemannův integrál (třeba podle Věty 6.7), stačilo by spočítat např. jenom $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = A$.

T Věta 6.4 (kritérium existence R. integrálu). *Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak*

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ dělení } D [a, b] : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

L Věta 6.5 (vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je (omezená) monotónní funkce na intervalu $[a, b]$. Pak $f \in R([a, b])$.*

Definice. Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 6.6 (o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti). *Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

(Bez důkazu.)

T Věta 6.7 (o vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je spojitá na $[a, b]$, pak $f \in R([a, b])$.*

Věta 6.8 (vlastnosti R. integrálu).

a) Linearita: $f, g \in R([a, b])$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g \in R([a, b])$, $\alpha f \in R([a, b])$ a

$$(R) \int_a^b f + g = (R) \int_a^b f + (R) \int_a^b g \quad a \quad (R) \int_a^b \alpha f = \alpha \cdot (R) \int_a^b f.$$

b) *Monotonie:* $f, g \in R([a, b])$, $f \leq g$, pak $(R) \int_a^b f \leq (R) \int_a^b g$.
c) *Aditivita vzhledem k intervalům:* Nechť $a < b < c$. Pak

$$f \in R([a, c]) \Leftrightarrow f \in R([a, b]) \text{ a } f \in R([b, c]),$$

$$(R) \int_a^c f = (R) \int_a^b f + (R) \int_b^c f.$$

(Bez důkazu.)

T Věta 6.9 (o derivaci integrálu podle horní meze). *Nechť J je neprázdný interval a $f \in R([\alpha, \beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod. Definujme na J funkci*

$$F(x) = \begin{cases} (R) \int_c^x f(t) dt & x \geq c; \\ -(R) \int_x^c f(t) dt & x \leq c. \end{cases}$$

Pak platí

- F je spojitá na J .
- Jestliže je f spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledek:

- (i) Je-li f spojitá na (a, b) , pak má na (a, b) primitivní funkci (Věta 5.2).
(ii) Nechť f je spojitá na intervalu $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$(R) \int_\alpha^\beta f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \beta_-} F(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha_+} F(x),$$

kde F je primitivní funkce k f na (α, β) .

Definice. Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál, jestliže má na (a, b) primitivní funkci F a $\lim_{x \rightarrow a_+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b_-} F(x)$ jsou vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo

$$(N) \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b_-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a_+} F(x)$$

(výraz na pravé straně značíme zkráceně $[F(x)]_a^b$).

L Věta 6.10 (per partes pro určitý integrál). *Nechť f, f', g, g' jsou spojitě na intervalu $[a, b]$. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx, .$$

Věta 6.11 (o substituci pro určitý integrál). (i) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ je funkce, která má na intervalu $[\alpha, \beta]$ spojitou první derivaci. Pak*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

(ii) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ je na a má na $[\alpha, \beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak*

$$\int_a^b f(x) dx = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt,$$

kde Φ je primitivní funkce k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.
(Bez důkazu.)

Poznámka. V předchozí větě není nezbytné, aby φ byla definovaná na celém uzavřeném intervalu $[\alpha, \beta]$. Můžeme také vzít funkci definovanou na (α, β) , a meze přepočítat pomocí limit.

6.2 Aplikace určitého integrálu

Definice. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá funkce, pak obsahem plochy pod grafem funkce f nazveme

$$\text{Obsah}(f, [a, b]) = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Definice. Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = (x_j)_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$. Označme

$$L(f, D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}.$$

Délkou křivky f nazveme

$$L(f([a, b])) = \sup\{L(f, D); D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

T Věta 6.12 (délka křivky). Nechť f má na intervalu $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak

$$L(f([a, b])) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(důkaz jen jedné nerovnosti)

Věta 6.13 (délka křivky v \mathbb{R}^n). Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá a má spojitou první derivaci. Pak

$$L(\varphi([a, b])) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(x))^2 + (\varphi'_2(x))^2 + \dots + (\varphi'_n(x))^2} dx$$

(Bez důkazu.)

Věta 6.14 (objem a povrch rotačního tělesa). Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b] \text{ a } \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$\text{Objem}(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\text{Obsah povrchu}(T) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(Bez důkazu.)

L Věta 6.15 (aproximace součtů pomocí integrálů). Nechť f je nerostoucí na intervalu $[a - 1, b]$ (resp. $[a, b + 1]$) a nechť je na tomto intervalu (Riemannovsky) integrovatelná. Buď $c_k = f(k)$. Pak

$$\sum_{k=a}^b c_k \leq \int_{a-1}^b f(x) dx \tag{1}$$

$$\sum_{k=a}^b c_k \geq \int_a^{b+1} f(x) dx \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Pokud je f neklesající, platí nerovnosti opačné.

Příklad. Odhadněme $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

L Věta 6.16 (integrální kritérium konvergence řad). *Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na intervalu $[n_0 - 1, \infty)$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost a_n platí $a_n = f(n)$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak*

$$(N) \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Příklad. Pro která a konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$?

7 Funkce více proměnných

Budeme se zabývat výrazy, ve kterých vystupuje více nezávislých proměnných. Naučíme se mj., jak hledat maxima/minima takových výrazů, a jak je aproximovat pomocí ‘tečen’ (tak např. spočteme 1.1^{0.98}). Napřed ale pár pojmů.

Definice. Funkcí n reálných proměnných rozumíme zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Množina M se nazývá definiční obor funkce f a značí D_f .

Definice. Buď $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ libovolný bod a $\delta > 0$. Pak δ -okolím bodu a nazveme množinu

$$U(a, \delta) = (a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \times \dots \times (a_n - \delta, a_n + \delta)$$

a prstencovým δ -okolím množinu $P(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$.

Množinu $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, pokud

$$\forall x \in G \exists \delta > 0 : U(x, \delta) \subseteq G.$$

Množina F se nazývá uzavřená, pokud její doplněk, tj. $\mathbb{R}^n \setminus F$ je otevřená.

Příklad. Pro $n = 1$ jsou otevřené intervaly otevřené množiny, uzavřené intervaly jsou množiny uzavřené.

K zamyšlení: Kdybychom definovali $U(x, \delta)$ jinak, konkrétně jako množinu bodů, jejichž vzdálenost od x je menší než δ , dostali bychom stejné otevřené množiny.

Definice limity i spojitosti je skoro stejná jako pro funkce jedné proměnné:

Definice. Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Značíme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Definice. Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in M$. Řekneme, že f je v a spojitá, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Pokud M není otevřená, může se stát, že žádné okolí bodu a neleží celé v M , tedy na žádném okolí není funkce f ‘všude definovaná’. Pak pro účely zjištění spojitosti uvažujeme ‘limitu vzhledem k M ’: ve výše uvedené definici místo

$$\forall x \in P(a, \delta)$$

píšeme

$$\forall x \in P(a, \delta) \cap M.$$

Zřejmě platí aritmetika limit, věta o strážnících i věta o spojitosti složené funkce, a proto je budeme používat na cvičení.

7.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice. Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \dots, n\}$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ a $x \in G$. Parciální derivací funkce f v bodě x podle i -té proměnné nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t},$$

pokud limita existuje.

Příklad. Necht $f(x, y) = e^x$. Pak $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x$, zatímco $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. (Znáte vtip o derivaci podle y ?)

Definice. Necht $M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f nabývá v bodě x_0 svého minima (lokálního minima) vzhledem k M , pokud

$$\text{pro všechna } x \in M \text{ platí } f(x) \geq f(x_0)$$

$$(\text{existuje } \delta > 0, \text{ že pro všechna } x \in M \cap P(x_0, \delta) \text{ platí } f(x) \geq f(x_0)).$$

Analogicky definujeme maximum (lokální maximum) a ‘ostré varianty’.

L Věta 7.1 (nutná podmínka existence extrému). Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in G$ a $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Má-li f v bodě a lokální minimum (maximum) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Někdy není úplně jasné, zda nalezené ‘podezřelé body’ s nulovými derivacemi jsou skutečně extrémy. Už u funkcí jedné proměnné nám druhá derivace pomohla poznat, zda je bod a , kde $f'(a) = 0$ minimum (pokud $f''(a) > 0$, f je konvexní) nebo maximum (pokud $f''(a) < 0$ a f je konkávní), nebo ani jedno (pokud $f''(a) = 0$... pak v a může (ale nemusí!) být inflexní bod). Obdobně zde, jen situace bude maličko složitější. Definice však je přímočará:

Definice. Druhou parciální derivací funkce f rozumíme parciální derivaci některé parciální derivace f , pokud existují. Pořádně:

Necht f má na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak definujeme pro $a \in G$ a $j \in \{1, \dots, n\}$ druhou parciální derivaci, kterou zapisujeme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a) \text{ pro } i \neq j$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a)$$

Obdobně definujeme a zapisujeme derivace vyšších řadů.

Pokud $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a f má všechny parciální derivace spojité, říkáme, že f je prvek $C^1(G)$. Obdobně, f je v $C^2(G)$, pokud má spojité všechny druhé parciální derivace, atd.

Poznámka. Pokud má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ spojitou parciální derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, pak existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ a je rovna $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$. **K zamyšlení:** Nalezněte f , pro kterou obě výše zmíněné parciální derivace existují, ale nerovnaj se.

Věta 7.2 (postačující podmínky pro lokální extrém). Necht $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a necht $f \in C^2(G)$. Necht $Df(a) = 0$ (tedy a je bod podezřelý na lokální extrém).

- Je-li $D^2f(a)$ pozitivně definitní, pak a je bod lokálního minima.
- Je-li $D^2f(a)$ negativně definitní, pak a je bod lokálního maxima.
- Je-li $D^2f(a)$ indefinitní, pak v a není extrém.

Zde $D^2f(a)$ značí $n \times n$ matici všech druhých parciálních derivací v bodě a , tj.

$$D^2f(a) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n.$$

(Bez důkazu.)

Příklad. Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ definované na celém \mathbb{R}^2 . **K zamyšlení:** Jsou tyto extrémy globální?

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in G$ a $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Derivaci funkce f v bodě $x \in G$ ve směru v nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

pokud limita existuje.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je totální diferenciál funkce f v bodě a , jestliže

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

L Věta 7.3 (o tvaru totálního diferenciálu). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a , pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a pro všechna $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Definice. Vektor $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right)$ se nazývá gradient funkce f v bodě a . Předchozí věta říká, že $Df(a)(h)$ je skalární součin vektorů h a $\nabla f(a)$.

Poznámka.

$f \in C^1(G) \implies Df(a)$ ex. pro všechna $a \in G \implies f$ je spojitá na G (Druhá implikace je celkem jednoduchá, první se dá uvěřit, když si nakreslíme obrázek, kde pro posun z bodu x do $x + dx$ (obojí n -složkové vektory) měníme jednu souřadnici po druhé.)

Příklad. Spočítejme přibližně $1.1^{0.9}$. Označme $f(x, y) = x^y$ a pišme

$$f(x + dx, y + dy) \doteq f(x, y) + Df(x, y)(dx, dy) \tag{4}$$

$$= f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \tag{5}$$

Tedy konkrétně $f(1 + 0.1, 1 - 0.1) \doteq f(1, 1) + 1 \cdot 0.1 + 0 \cdot (-0.1) = 1.1$. (Přesná hodnota je $1.0895\dots$)

Kdybychom chtěli hodnotu funkce poblíž známého bodu aproximovat přesněji, museli bychom použít *Taylorův polynom* pro více proměnných vyššího řádu. Efektivní způsob jak takový polynom zapsat je

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(a)$$

— toto je třeba chápat tak, že závorku formálně roznásobíme, tím dostaneme výrazy typu $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, ty pak ‘aplikujeme’ na f v bodě a . Tento vzorec si nebudeme dokazovat, avšak: **K zamyšlení:** pro $N = 1$ dostáváme výše zkoumanou aproximaci pomocí totálního diferenciálu. Pro $N = 2$ se objeví ‘kvadratický výraz’ $(dx)^T D^2 f(a) dx$ (zde $D^2 f(a)$ je matice $n \times n$, dx je n -složkový vektor). Odsud se dá dokázat (s troškou práce) Věta 7.2.

Věta 7.4 (o aritmetice totálního diferenciálu). *Nechť $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ pro otevřenou $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in G$ a $Df(a), Dg(a)$ existují. Pak existují i $D(f+g)(a)$, $D(cf)(a)$ ($c \in \mathbb{R}$), $D(fg)(a)$, a pokud $g(a) \neq 0$ pak i $D(f/g)(a)$ a platí*

1. $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$
2. $D(cf)(a) = cD(f)(a)$
3. $D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + Df(a)g(a)$
4. $D(f/g)(a) = \frac{Df(a)g(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2}$.

(Bez důkazu.)

Věta 7.5 (diferenciál složeného zobrazení). *Nechť $a \in \mathbb{R}^s$, $b \in \mathbb{R}^n$, f je funkce n proměnných a g_j , $j = 1, \dots, n$, jsou funkce s proměnných. Nechť*

$$g_j(a) = b_j \text{ pro } j \in \{1, \dots, n\} \text{ a nechť}$$

$$\text{existují } Df(b), Dg_1(a), \dots, Dg_n(a).$$

Definujme funkci $H : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$H(x) = f(g_1(x), \dots, g_n(x)).$$

Pak H má v bodě a totální diferenciál a platí

$$DH(a)(h) = \sum_{i=1}^s \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \right] h_i$$

pro všechna $h \in \mathbb{R}^s$, neboli v maticovém zápisu

$$DH(a)(h) = Df(g(a))Dg(a)h.$$

???
(Bez důkazu.)

Poznámka. Speciálně odsud plyne tzv. řetízkové pravidlo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(g_1(x), \dots, g_n(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}.$$

Příklad. Zkuste si zderivovat $H(x) = x^x$ jako složené zobrazení pro $f(u, v) = u^v$ a $u(x) = v(x) = x$.

7.2 Vázané extrémny

Napřed si řekněme, prozatím bez důkazu, větu, která zobecňuje to, co dobře známe z funkcí jedné proměnné: spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima a minima. (Tato věta by se hodila už dříve, při rozhodování o tom, zda nalezené lokální extrémny podle Vět 7.1 a 7.2 jsou globální.)

T Věta 7.6 (Existence extrému na omez. uzavř. množ. v \mathbb{R}^n). *Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená omezená množina. (Množina je omezená, pokud existuje konstanta C tak, že všechny body F mají od počátku souřadnic vzdálenost maximálně C .) Nechť $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak f nabývá na F maxima i minima.*

(později)

Příklad. Zkoumejme funkci $f(x, y) = xy^2e^x$ jednotkovém kruhu, tj. na množině $B(\vec{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Jedná se o spojitou funkci na uzavřené omezené množině, tudíž nabývá extrémů. Jak je ale najít? Pro funkci jedné proměnné jsme zvlášť prozkoumali koncové body a zvlášť otevřený interval (tak, že jsme hledali body, kde je derivace rovna nule).

Zde budeme postupovat obdobně. Extrémny f na B mohou být nabyty buď 'uvnitř' (v tomto případě je asi jasné, co se tím myslí, přesná definice příště), nebo na hranici. Pro první případ máme Věty 7.1 a 7.2.

Pro body na hranici bychom mohli v tomto případě zkoušet dosazovat $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, popř. se s tím, že musíme uvažovat i $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$ a že bod $(x, y) = (1, 0)$ je speciální a vyšlo by to. Elegantnější postup dává následující věta (po jejímž vyslovení příklad dopočítáme).

Věta 7.7 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $s < n$, $f, g_1, \dots, g_s \in C^1(G)$ a mějme množinu*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = \dots = g_s(x) = 0\}.$$

Je-li $a \in M$ bodem lokálního extrému f vzhledem k M a vektory

$$\begin{aligned} \nabla g_1(a) &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a), \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \right) \\ &\quad \vdots \\ \nabla g_s(a) &= \left(\frac{\partial g_s}{\partial x_1}(a), \frac{\partial g_s}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(a) \right) \end{aligned}$$

jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tak, že

$$\nabla f(a) + \lambda_1 \nabla g_1(a) + \dots + \lambda_s \nabla g_s(a) = 0$$

neboli

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) + \dots + \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_1}(a) &= 0, \\ &\quad \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) + \dots + \lambda_s \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(a) &= 0. \end{aligned}$$

(Bez důkazu.)

Poznámka. Věta nám říká, že pokud extrém existuje, tak ho umíme najít z nějaké rovnice. Věta ale nezaručuje existenci extrému (k tomu musíme použít Větu 7.6) ani neříká, že bod z rovnice nalezený je extrém (existuje varianta Věty 7.2, ale je trochu technická!).

K zamyšlení: Kdyby se ve větě vynechal předpoklad o lineární nezávislosti vektorů $\nabla g_i(a)$ pro $i = 1, \dots, s$, tak by přestala platit. Proč? (Nakreslete obrázek – to je asi rozumější – nebo najdete protipříklad, kde funkci f a funkce g_i zadáte pomocí vzorců.)

8 Metrické prostory

Motivace: Máme-li dva body v rovině, jsou nejméně tři přirozené způsoby přiřazení vzdálenosti. Můžeme zkoumat eukleidovskou (“normální”) vzdálenost, součtovou vzdálenost (užitečnou při cestování městem s pravouhlou sítí silnic), nebo maximovou vzdálenost (užitečná při pohybu šachového krále). Bude se tedy hodit, prozkoumat pojem vzdálenosti ve větší obecnosti.

8.1 Základní pojmy

Definice. Metrickým prostorem budeme rozumět dvojici (P, ρ) , kde P je množina bodů a $\rho : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje

1. $\forall x, y \in P : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\forall x, y \in P : \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (symetrie),
3. $\forall x, y, z \in P : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost).

Funkci ρ nazýváme metrika.

Příklad. 1) Eukleidovská metrika na \mathbb{R}^n . Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

2) Maximová metrika na \mathbb{R}^n . Definujeme $\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1 \dots n} |x_i - y_i|$.

3) Součtová metrika na \mathbb{R}^n . Definujeme $\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

4) Diskrétní metrika na libovolné množině P je definována jako $\rho(x, x) = 0$ pro všechna $x \in P$ a $\rho(x, y) = 1$ pro všechna $x \neq y$.

5) Supremová metrika na $C([0, 1])$ je definována $\rho(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

6) Metrika na $L^2([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty\}$ je definována $\rho(f, g) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx}$.

K zamyšlení: Rozmyslete si, že výše uvedené vzorce skutečně určují metriku.

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $x \in P$, $r > 0$. Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme množinu

$$B(x, r) := \{y \in P : \rho(x, y) < r\}.$$

Uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme množinu

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in P : \rho(x, y) \leq r\}.$$

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subset P$ je otevřená (v (P, ρ)), jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r > 0$, že $B(x, r) \subset G$. Řekneme, že množina $F \subset P$ je uzavřená (v (P, ρ)), pokud je $P \setminus F$ otevřená.

Příklad. Otevřený interval je otevřená množina v (\mathbb{R}, ρ_1) . Uzavřený interval je uzavřená množina v (\mathbb{R}, ρ_1) .

L Věta 8.1 (vlastnosti otevřených množin). *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pak*

1. \emptyset a P jsou otevřené množiny.
2. Jsou-li G_1, \dots, G_n otevřené, pak $\bigcap_{i=1}^n G_i$ je otevřená.
3. Jsou-li $G_\alpha, \alpha \in A$ otevřené, pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená.

K zamyšlení: Ve třetí části je A libovolně velká množina. Oproti tomu druhá část neplatí pro nekonečné průniky. Proč?

L Věta 8.2 (vlastnosti uzavřených množin). *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pak*

1. \emptyset a P jsou uzavřené množiny.
2. Jsou-li F_1, \dots, F_n uzavřené, pak $\bigcup_{i=1}^n F_i$ je uzavřená.
3. Jsou-li $F_\alpha, \alpha \in A$ uzavřené, pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená.

Definice. *Nechť (P, ρ) a (P, σ) jsou metrické prostory. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní pokud existují konstanty $c_1, c_2 > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in P$ platí*

$$c_1\rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq c_2\rho(x, y).$$

K zamyšlení: *Výše definovaná ekvivalence metrik je opravdu relace ekvivalence (tj. symetrická, reflexivní a tranzitivní). K zamyšlení: Ekvivalentní metriky ... mají stejné otevřené a uzavřené množiny.*

8.2 Konvergence v metrických prostorech

Definice. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $(x_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že $(x_n)_{n=1}^\infty$ konverguje k x (v (P, ρ)), pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, nebo $x_n \xrightarrow{P} x$.*

Poznámka. *Ekvivalentní s výše uvedenou definicí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ je následující geometricky názorný zápis*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : x_n \in B(x, \varepsilon).$$

L Věta 8.3 (vlastnosti konvergence). *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pak platí*

- *Nechť pro posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ z P existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n = x$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.*
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \Rightarrow x = y$. (Jednoznačnost limity)
- *Nechť $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ je vybraná posloupnost z $(x_n)_{n=1}^\infty$ a nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Pak $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.*

L Věta 8.4 (charakterizace uzavřených množin). *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $F \subset P$. Pak*

$$F \text{ je uzavřená} \Leftrightarrow (x_n \xrightarrow{P} x \text{ a } x_n \in F \Rightarrow x \in F).$$

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $K \subset P$. Řekneme, že K je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti prvků K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K .

L Věta 8.5 (vlastnosti kompaktních množin). Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Pak platí

- K je uzavřená,
- Je-li $F \subset K$ uzavřená, pak je F kompaktní,
- K je omezená (tedy $\exists x \in P, r > 0$, že $K \subset B(x, r)$).

T Věta 8.6 (charakterizace kompaktních množin \mathbb{R}^n). Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

8.3 Spojitá zobrazení mezi metrickými prostory

Definice. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Nechť $M \subset P$, $f : M \rightarrow Q$ a $x_0 \in M$.

Řekneme, že f je spojitá v bodě x_0 (vzhledem k M), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\rho(x_0, \delta) \cap M : f(x) \in B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Řekneme, že f je spojitá na M (vzhledem k M), jestliže je spojitá v každém bodě M (vzhledem k M).

Nechť pro každé $\delta > 0$ platí $B_\rho(x_0, \delta) \cap M \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Řekneme, že f má v bodě x_0 limitu (vzhledem k M) rovnou $y \in Q$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\rho(x_0, \delta) \cap M \setminus \{x_0\} : f(x) \in B_\sigma(y, \varepsilon).$$

Věta 8.7 (charakterizace spojitosti). Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \rightarrow Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- f je spojitá na P .
- $\forall G \subset Q$ otevřenou, je $f^{-1}(G)$ otevřená,
- $\forall F \subset Q$ uzavřenou, je $f^{-1}(F)$ uzavřená.

(Bez důkazu.)

Poznámka. Mohli bychom tedy rozhodnout o spojitosti zobrazení i bez znalosti metrik ρ a σ , stačilo by vědět, které podmnožiny P , resp. Q , jsou otevřené. Toho se využívá v tzv. topologických prostorech: to je množina bodů se systémem množin, kterým se bude říkat otevřené. (Tento systém musí splňovat některé axiomy, např. ty z Věty 8.1.)

Příklad. Buď $f(x, y) = x^2 + y^2$. Toto je spojitá (**K zamyšlení:** proč?) funkce $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Zvolme uzavřené množiny $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$ takto: $F_1 = \{1\}$, $F_2 = (-\infty, 1]$. Dle Věty 8.7 jsou uzavřené i jejich vzory, tedy množiny

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \\ &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

T Věta 8.8 (nabývání extrémů na kompaktu). *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Nechť $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Pak f nabývá na K svého maxima i minima. Speciálně je tedy f na K omezená.*

Poznámka. *Tuto větu známe už ze zimního semestru, kde ovšem P bylo \mathbb{R} , $\rho(x, y) = |x - y|$ a K uzavřený interval. Uvědomte si, že předvedený důkaz je vlastně stejný. Podobné varianty existují i pro jiné věty, např. Věta 6.6 o stejnoměrné spojitosti též platí pro spojitě funkce na kompaktních množinách.*

9 Vícerozměrný integrál

Následující část se nezkouší, je zde jen pro informaci.

Definice. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a_i \leq b_i$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ a $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je (n -rozměrný) interval v \mathbb{R}^n . Potom definujeme objem I jako*

$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Definice. *Nechť $(x_i^d)_{i=0}^{k_d}$ je dělení intervalu $[a_d, b_d]$ (tedy $a_d = x_0^d < x_1^d < \dots < x_{k_d-1}^d < x_{k_d}^d = b_d$) pro $d \in \{1, \dots, n\}$. Pak*

$$[(x_{i_1}^1)_{i_1=0}^{k_1}, \dots, (x_{i_n}^n)_{i_n=0}^{k_n}]$$

tvorí dělení intervalu I . Dále značíme podintervaly I jako

$$I_{i_1, i_2, \dots, i_n} = [x_{i_1-1}^1, x_{i_1}^1] \times [x_{i_2-1}^2, x_{i_2}^2] \times \dots \times [x_{i_n-1}^n, x_{i_n}^n]$$

pro $i_1 \in \{1, \dots, k_1\}, \dots, i_n \in \{1, \dots, k_n\}$.

Definice. *Nechť I je n -rozměrný interval, Nechť $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce a D je dělení I . Definujeme horní a dolní součty*

$$S(f, D) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \sup\{f(x); x \in I_{i_1, i_2, \dots, i_n}\} |I_{i_1, i_2, \dots, i_n}|,$$

$$s(f, D) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} \inf\{f(x); x \in I_{i_1, i_2, \dots, i_n}\} |I_{i_1, i_2, \dots, i_n}|,$$

horní Riemannův integrál

$$(R) \overline{\int}_I f(x) dx = \inf\{S(f, D); D \text{ je dělení } I\}$$

a dolní Riemannův integrál

$$(R) \underline{\int}_I f(x) dx = \sup\{s(f, D); D \text{ je dělení } I\}.$$

Pokud $(R) \overline{\int}_I f(x) dx = (R) \underline{\int}_I f(x) dx$, pak řekneme, že f je Riemannovsky integrovatelná na I a klademe

$$(R) \int_I f(x) dx = (R) \underline{\int}_I f(x) dx.$$

Množinu funkcí majících Riemannův integrál značíme $R(I)$.

Věta 9.1 (vlastnosti Riemannovských součtů). *Nechť f je omezená funkce na intervalu I a D je dělení I . Pak*

$$s(f, D) \leq (R) \int_I f(x) dx \leq (R) \overline{\int_I f(x) dx} \leq S(f, D).$$

Věta 9.2 (o jemnějším dělení). *Nechť f je omezená funkce na intervalu I a D_1, D_2 jsou dělení I . Nechť D_2 je jemnější dělení než D_1 (tedy všechny dělicí body D_1 jsou dělicími body v D_2). Pak*

$$s(f, D_1) \leq s(f, D_2) \leq S(f, D_2) \leq S(f, D_1).$$

Věta 9.3 (vlastnosti R integrálu).

a) *Linearita: $f, g \in R(I), \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g \in R(I), \alpha f \in R(I)$ a*

$$(R) \int_I f + g = (R) \int_I f + (R) \int_I g \quad a \quad (R) \int_I \alpha f = \alpha (R) \int_I f.$$

b) *Monotonie: $f, g \in R(I), f \leq g$, pak $(R) \int_I f \leq (R) \int_I g$.*

c) *Aditivita vzhledem k intervalm: Nechť I je interval a $a_1 < c_1 < b_1$. Označme*

$$I_1 = [a_1, c_1] \times [a_2, b_2] \dots [a_n, b_n] \quad a \quad I_2 = [c_1, b_1] \times [a_2, b_2] \dots [a_n, b_n].$$

Pak

$$f \in R(I) \Leftrightarrow f \in R(I_1) \quad a \quad f \in R(I_2),$$

$$(R) \int_I f = (R) \int_{I_1} f + (R) \int_{I_2} f.$$

(Bez důkazu.)

Věta 9.4 (o vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je spojitá na n -rozměrném intervalu I , pak $f \in R(I)$.*

Věta 9.5 (Fubiniho). *Nechť f je spojitá funkce na n -rozměrném intervalu I . Pak*

$$(R) \int_I f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\dots \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \right) \dots \right) dx_1.$$

Poznámka. *Vícerozměrný integrál lze zavést i pro jiné množiny než intervaly, například pro konvexní množiny. Fubini platí pro spojitě funkce na omezené konvexní množině, popřípadě pro nezáporné spojitě funkce na konvexní množině (i neomezené).*

Pro libovolnou množinu A můžeme zkusit definovat velikost A (obsah, objem, obecně tzv. míru) jako integrál z funkce, která je 1 na A a 0 mimo A . Pomocí Fubiniovy věty pak dostaneme známý vzorec pro obsah plochy pod křivkou, nebo také:

Skoro důsledek – objem rotačního tělesa: *Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme*

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b] \quad a \quad \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

Pak

$$\text{Objem}(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$