

# 1. cvičení z MA—25. a 26.2.2009

## Aplikace průběhů funkcí

Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

1.

- (a) Který z obdélníků o obvodu  $l$  má největší obsah?
- (b) Který z válců o objemu  $V$  má nejmenší povrch?
- (c) Z čtvercového listu papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabíčku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstříhnout, aby vzniklá krabíčka měla co největší objem?
- (d) Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr? Tip: použijte Jensenovu nerovnost. Pro konvexní funkci  $f$  a čísla  $\alpha_i, x_i$  taková, že  $\alpha_i \geq 0, \sum_i \alpha_i = 1$  platí, že

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i).$$

(e) Z chodby o šířce  $A$  odbočuje chodba o šířce  $B$ . S jak dlouhou tyčí je možno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

2. Dokažte a zapamatujte si následující nerovnosti.

- (a) Pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí  $e^x \geq 1 + x$ .
- (b) Pro všechna  $x \in (-1, \infty)$  platí  $\ln(1 + x) \leq x$ .
- (c) Pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí  $1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$ .
- (d) pro všechna  $x \geq 0$  platí  $\sin x \leq x$ .

3.  $(1 + 1/x)^x$  je rostoucí funkce ( $x \in \mathbb{R}^+$ ).

## Taylorův polynom

Zopakujte si, co je to Taylorův polynom stupně  $n$  pro funkci  $f(x)$  v bodě  $x = a$ . Jaké věty o něm znáte?

4. Napište Taylorův polynom v nule (stupně např. 5) pro následující funkce

- (a)  $e^x$
- (b)  $\log(1 + x)$
- (c)  $\sin x$
- (d)  $\cos x$
- (e)  $(1 + x)^a$

5. Pomocí Taylorova polynomu spočítejte následující limity:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$ ,
- (d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$ .

6. Použitím Taylorova polynomu spočítejte přibližně  $\sqrt{2}$  (a další dle libosti) a **odhadněte chybu**. Čili určete interval  $(a, b)$  co nejmenší délky, v němž dané číslo leží.

7. Spočítejte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla:  $\sin 0.1, \cos 0.1, \sqrt{0.98}, \sqrt[3]{1279.03}, e^{0.01}, \log 1.2, \log 2, \sqrt[12]{1.03}, 1.01^5, \dots$

1.414 213

0.099 833, 0.995 004, 0.989 949, 12.002 3, 1.010 050, 0.182 321, 0.693 147, 1.002 466, 1.051 010