Úloha lineárního programování (1)

$\max c^T x$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

Standardní tvar (ST)

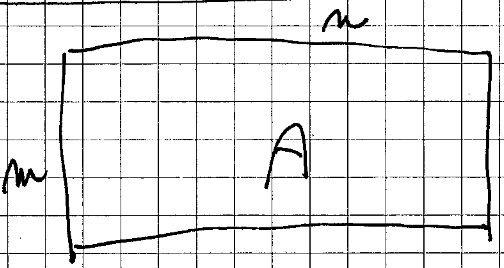
$\max c^T x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

A má lin. nez. řádky

Úmluva:



A reálná matice

b, c reálné vektory

Pozorování. Každou úlohu LP lze převést na ST přidáním pomocných proměnných a vypuštěním zbytečných řádků.

Definice. $B \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ je *báze* matice A jestliže $\det A_B \neq 0$.

[úmluva: A_B je podmatice A tvořená sloupci indexovanými prvky B. Stejně pro vektory.]

Definice • $P = \{x;\ Ax = b,\ x \geq 0\}$ je množina přípustných řešení.

• $x \in P$ je *bázické* existuje-li báze B matice A že $x_i = 0\ \forall i \notin B$. Říkneme, že x patří bázi B.

• **Pozorování**: Každé bázi patří nejvýše 1 přípustné řešení.
(jednoduché)

~~Pozorování: Nechť B je báze. Existuje nejvýše 1 bázické přípustné řešení báze B.~~

Věta 1 Je-li $(c^T x \,;\, Ax = b,\ x \geq 0)$ shora omezeno potom pro každé přípustné řešení x_0 existuje bázické přípustné řešení $\overline{x}$: $c^T x_0 \leq c^T \overline{x}$.

Důkaz: str. 9

Definice. • Konvexní polyhedron je průnikem konečně mnoha poloprostorů, t. j.

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax \leq b\}.$$

• Mnohostěn je omezený konvexní polyhedron.

Definice. Nechť P je konvexní polyhedron.

- $v \in P \subseteq \mathbb{R}^n$ je vrchol jestliže existuje $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ že $c^T v > c^T y$ pro každé $y \in P \setminus \{v\}$.
- $F \subseteq P$ je k-dimensionální stěna P jestliže F je konvexní polyhedron dimenze k a existuje $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, že $(\forall y \in F)(c^T y = r)$ a zároveň $(\forall y \in P \setminus F)(c^T y < r)$.

Věta 2 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax = b,\ x \geq 0\}$, $v \in P$. Je ekvivalentní

- v je vrchol P
- v je bázické přípustné řešení.

Důkaz (str. 9-10)

Simplexová Metoda $[(\tilde{ST})\ Ax = b,\ z = c^T x]$

1. Nechť $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ je báze, ne nutně přípustná.

<u>Tabulka báze B</u> (T_B)

$$\frac{x_B = p + Q x_N}{z = z_0 + r^T x_N}$$

Příslušné řešení úlohy $(\tilde{ST})$: dvojice (x, z) kde $x_N = 0$, $x_B = p$, $z = z_0$

$N = \{1, \dots, n\} \setminus B$

x_B vektor bázických prom.

x_N vektor nebázických prom.

z proměnná

Q $m \times (n-m)$ matice

p, r vektory

$z_0 \in \mathbb{R}$

sloupce indexovány N

2. Simplexová tabulka vznikne elementárními řádkovými úpravami z $(\tilde{ST})$.
3. Tudíž množina řešení systému rovnic $(\tilde{ST})$ je stejná jako množina řešení systému rovnic (T_B).
4. Elementární řádkové úpravy odpovídají násobení maticí zleva. Tudíž:
5. <u>Pozorování</u>.

$$Q = -A_B^{-1} A_N,\ p = A_B^{-1} b,\ z_0 = c_B^T A_B^{-1} b,$$

$$r = c_N - (c_B^T A_B^{-1} A_N)^T$$

<u>Důkaz</u>. (začátek) Abychom dostali (řád. úpr.) jednotkovou matici místo A_B, musíme A vynásobit zleva A_B^{-1}. Pozorování je důsledek tohoto kroku. $\boxtimes$

Příslušné řešení báze B má tvar (x, z).

x je přípustné pro (ST) právě když $p \geq 0$.

x je optimální pro (ST) právě když $p \geq 0$ a $r \leq 0$.

Důkaz. Množina řešení ($\tilde{S}T$) je stejná jako množina řešení (T_B).

Nechť $\tilde{x}$ je přípustné řešení (ST), t.j. $A\tilde{x} = b$, $\tilde{x} \geq 0$. Nechť $\tilde{z} = c^T\tilde{x}$.

Potom $(\tilde{x}, \tilde{z})$ je řešení ($\tilde{S}T$) a tudíž i (T_B). Je-li $r \leq 0$, dostaneme $\tilde{z} \leq z_0$. $\boxtimes$

Přecházení od jedné tabulky k další se děje krokem, kterému se říká PIVOT.

V každém pivotu se báze B upraví takto:

$$B' := B \cup \{v\} \setminus \{u\}, \text{ kde}$$

B' značí novou bázi

(a) Vstupní proměnná x_v musí splňovat $r_v > 0$

(b) $Q_{uv} < 0$ a $-\dfrac{p_u}{Q_{uv}} = \min\left\{-\dfrac{p_i}{Q_{iv}};\ Q_{iv} < 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\right\}$.

(?) Co když u neexistuje (?)

Pozorování Je-li sloupec Q^v matice Q indexovaný $v \in N$ nezáporný, potom je úloha ($\tilde{S}T$) neomezená.

Důkaz. Nechť (x, z) je příslušné řešení báze B úlohy ($\tilde{S}T$). ~~We let~~, Pro $t \geq 0$ definujme

$$x(t)_B = x_B + Q^v \cdot t, \quad x(t)_v = t, \quad x(t)_w = 0 \text{ pro } w \in N \setminus \{v\}.$$

Potom hodnota cílové funkce pro $x(t)$ je $z_0 + t \cdot r_v$; tato hodnota jde do $+\infty$ pro $t \to +\infty$.
Navíc každé $x(t)$ je přípustné. $\boxtimes$

Předpokládejme tedy že (u, v) existují

! $B' = B \cup \{v\} \setminus \{u\}$ je báze matice A neboť elementárními řádkovými úpravami dostaneme $T_{B'}$ z T_B; tudíž $(A_{B'})^{-1}$ existuje a tudíž $\det A_{B'} \neq 0$.

! Nechť (x', z') je řešení ($\tilde{S}T$) příslušné bázi B'.
Potom $x' = x$ nebo $c^T x' > c^T x$.

Důkaz Víme že $p \geq 0$. Jestliže $p_u > 0$, potom $c^T x' > c^T x$. Jestliže $p_u = 0$, dostaneme $x' = x$. $\boxtimes$

Je-li $x' = x$, říkáme že pivot je degenerovaný.

Degenerované pivoty mohou vést k cyklení: po několika degenerovaných krocích můžeme opět dojít k Bázi B. !

Věta 3 Pivot daný Blandovým pravidlem nevede k cyklení

Důkaz: str. 11

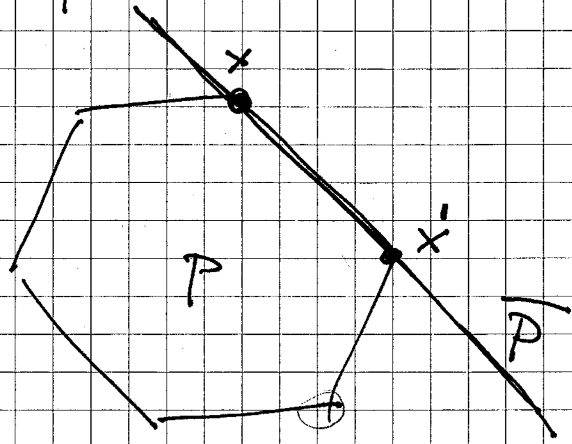
PIVOT geometricky

Nechť $x' \neq x$. $\overline{B} = B \cup \{v\} \Rightarrow |\overline{B}| = m+1$

$\overline{P} = \{ z ; A_{\overline{B}} z_{\overline{B}} = b \}$ je afinní prostor dimenze 1, t. j. přímka, $x \in \overline{P}$, $x' \in \overline{P}$.

Geometrický pohled:

~~$\overline{P}$ definuje stěnu P.~~



Věta $\overline{P}$ definuje <u>stěnu</u> množiny přípustných řešení.

<u>Důkaz</u>. Definujme $c = (c_1, \dots, c_n)$ předpisem:

$$c_i = 0,\ i \in \overline{B};\quad c_i = -1,\ i \in \{1, \dots, n\} \setminus \overline{B}.$$

Potom $\max(c^T x ; Ax = b, x \geq 0) = 0$, a navíc

- $x \in \overline{P}$, $x \geq 0 \Rightarrow c^T x = 0$.
- $x \notin \overline{P}$, $Ax = b$, $x \geq 0 \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \setminus \overline{B}$ tak že $x_i > 0$ a tudíž $c^T x < 0$.

Tudíž $\overline{P} \cap \{x ; Ax = b, x \geq 0\}$ je množina všech optimálních řešení, a tudíž je to stěna.

$\boxtimes$

Pivotní Pravidla

1. Vyber vstupní proměnnou s největším koeficientem (r_v max)

2. Vyber vstupní proměnnou která vede k největší změně cílové funkce

3. Nejúspěšnější vyber x' aby

$$\max \frac{c^T(x'-x)}{\|x'-x\|} \quad \left[\|z\| = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_n^2} \right]$$

4. <u>Blandovo pravidlo</u> vždy vyber vstupující v co nejmenší a potom vystupující u co nejmenší.

Věta 3 (připomenutí) Simplexová metoda s Blandovým pravidlem se nezacyklí, t.j., vždy skončí a dá správný výsledek.

Nalezení počáteční přípustné báze

8

① Je-li LP tvaru $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $b \geq 0$
potom počáteční báze je tvořena pomocnými proměnnými které převádí vstupní úlohu na (ST).

② <u>Obecně</u>: Máme-li úlohu (ST) $Ax = b$, $x \geq 0$, můžeme předpokládat že $b \geq 0$ [ne $\Rightarrow$ vynásob (-1) příslušné řádky]

- Vyřešíme pomocnou úlohu

$$\max -y_1 - \dots - y_m$$
$$Ax + y = b$$
$$x, y \geq 0.$$

Počáteční přípustná báze je $\{y_1, \dots, y_m\}$.

<u>Věta</u> (ihned vidět). Je ekvivalentní

1. Původní úloha $[\max c^T x ; Ax = b, x \geq 0]$ má přípustné řešení
2. Optimální hodnota cílové fce pomocné proměnné je 0
3. Pomocná úloha má přípustné řešení splňující $y = 0$.

Vyřešme pomocnou úlohu S. Metodou (cílová fce je omezená). Výsledné bázické řešení, které má hodnotu 0, má $y_1 = \dots = y_m = 0$ a dává přípustné bázické řešení původní úlohy.

$\boxed{\text{Důkazy Vět 1, 2, 3}}$

$\boxed{\text{Věta 1}}$ Mezi všemi přípustnými řešeními x splňujícími $c^T x \geq c^T x_0$ nechť $\bar{x}$ má nejvíce komponent rovno 0.

Nechť $K = \{ j \leq n ; \bar{x}_j > 0 \}$.

- Jestli jsou sloupce A_K lin. nezávislé, je $\bar{x}$ bázické.
- Jinak nechť $0 \neq v$ splňuje $A_K v = 0$. Rozšiřme v nulami na vektor $w \neq 0$ splňující $Aw = 0$.
- Nejprve nechť w splňuje

$$\boxed{\begin{array}{l} (*) \quad c^T w \geq 0 \\ \exists j \in K,\ w_j < 0. \end{array}}$$

Definujme $x(t) = \bar{x} + t \cdot w$. Ukážeme že existuje $t_1 > 0$ tak že $x(t_1)$ je přípustné řeš. s více 0-komponentami než $\bar{x}$. (To je spor s výběrem $\bar{x}$ ned) Navíc pro každé t

$$c^T x(t) = c^T \bar{x} + t \cdot c^T w \geq c^T \bar{x}.$$

- Platí $Ax(t) = A\bar{x} + t \cdot Aw = b + 0 = b$, pro každé t.
- Je-li $w_j < 0$ ~~pak pro nějaké~~, $j \in K$ pak pro nějaké $t > 0$ bude $x(t)_j = 0$. Vem ~~první t~~ nejmenší $t_1 > 0$ že toto nastane pro nějaké $j \in K$. Pak $x(t_1) \geq 0$, je přípustné a má méně nenulových komponent. Tím je případ $(*)$ vyřešen.

$\boxed{\text{Nechť } (*) \text{ nenastane.}}$ • $c^T w = 0 \Rightarrow w$ nebo $-w$ splňuje $(*)$.

- Můžeme předp. že $c^T w > 0$ (w nebo $-w$ to splňuje).

$(*)$ neplatí $\Rightarrow w \geq 0$. Pak všechny $x(t)$ jsou přípustná řešení, a $c^T x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} +\infty$. To je spor s omezeností.

$\boxtimes$

$\boxed{\text{Důkaz Věty 2}}$ [v vrchol $\Longleftrightarrow$ v bázické řešení]

„$\Longrightarrow$" přímo z definice vrcholu a Věty 1

„$\Longleftarrow$" v bázické přípustné řešení odpovídající bázi $B \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Definujme $\bar{c}$: $\bar{c}_j = 0$, $j \in B$, $\bar{c}_j = -1$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus B$.

Potom $\bar{c}^T v = 0$ a $\bar{c}^T x \leq 0$ pro každé $x \geq 0$. Tudíž v je optimální. Navíc $\bar{c}^T x' < 0$ pro každé $x' \geq 0$ splňující $x'_j > 0$ pro nějaké $j \in \{1, \dots, n\} \setminus B$.

Tudíž jen vektory x splňující $x_{\{1 \dots n\} \setminus B} = 0$ mohou být optimální, a takový přípustný vektor je jediný, protože $A_B x_B = b$ má jediné řešení $x_B = v$ (protože B je báze). $\boxtimes$