Dualita LP

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \boxed{\quad A \quad} \end{array}$$

Uvažme LP tvaru $\max c^T x;\ Ax \le b;\ x \ge 0$.

Nechť A_i značí řádek matice A.

<u>Úvaha</u>:

Uvažme nezápornou lineární kombinaci $y = (y_1, \dots, y_m)$ řádků matice A, t.j. $\boxed{y^T A}$.

Nechť $y^T A \ge c^T$. Nechť $A\bar{x} \le b$, $\bar{x} \ge 0$.

Potom $(y^T A)\bar{x} \ge c^T \bar{X}$.

Ale také $(y^T A)\bar{x} \le y^T b$.

<u>Závěr</u>: Nechť $y \in \mathbb{R}^m$, $y \ge 0$, $y^T A \ge c^T$.

Potom $y^T b$ je <u>horní odhad</u> pro $\max c^T x;\ Ax \le b, x \ge 0$

<u>Toto je slabá věta o dualitě</u>

Věta o dualitě LP

(P) $\max c^T x$; $Ax \le b$, $x \ge 0$

(D) $\min b^T y$; $A^T y \ge c$, $y \ge 0$

Nastane právě jedna z následujících možností.

1. (P) ani (D) nemají přípustné řešení
2. (P) je neomezená a (D) nemá přípustné řešení
3. (D) je neomezená a (P) nemá přípustné řešení
4. (P) i (D) mají přípustné řešení. Pak obě mají optimální řešení. Nechť x^* je optimální řešení (P) a y^* je optimální řešení (D).

   Potom $c^T x^* = b^T y^*$.

<u>Důsledek 1.</u> Úloha ~~[illegible]~~ najít $x \ge 0$ splňující $Ax = b$ je stejně těžká jako LP.

<u>Důkaz.</u>

$$(*)\quad \begin{pmatrix} Ax \le b \\ A^T y \ge c \\ c^T x \ge b^T y \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{pmatrix}$$

Má řešení právě když

$$\max c^T x \quad Ax \le b \quad x \ge 0$$

má optimální řešení

Navíc každé řešení $(*)$ má tvar (x^*, y^*) kde x^* je optimální řešení (P) a y^* je optimální řešení (D).

Nechť M je matice. M_l značí l-tý řádek M.

Důsledek 2. [Podmínky komplementarity]

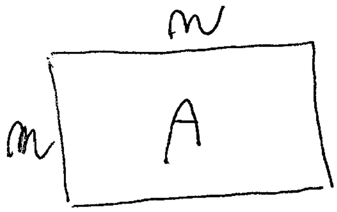
Nechť x je přípustné řešení pro (P) a y je přípustné řešení pro (D). Potom x, y optimální právě když platí:

1. $x_i = 0$ nebo $(A^T)_i y = c_i$ $\forall i = 1, \dots, n$
2. $y_j = 0$ nebo $A_j x = b_j$ $\forall j = 1, \dots, m$

Důkaz.

$$c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} (y^T A)_i x_i = (y^T A) x = y^T (A x) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j (A_j x) \le \sum_{j=1}^{m} y_j b_j = b^T y. \quad \boxtimes$$



Věta o oddělování. $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdné, uzavřené, konvexní a disjunktní. Nechť C je omezená. Potom existuje nadrovina $\{x ; a^T x = b\}$ silně oddělující C a D, t.j. $C \subseteq \{x ; a^T x < b\}$ a $D \subseteq \{x ; a^T x > b\}$.

$\boxed{\text{Dualita LP úzce souvisí s V. o oddělování}}$

Věta (Farkasovo lemma) $m \left[\overset{n}{A} \right]$

Nastane přesně jedna z následujících možností:

1. Existuje $x \geq 0$, $Ax = b$
2. Existuje y, $y^T A \geq 0$, $y^T b < 0$.

Geometricky: $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$.

Konvexní kužel generovaný $a_1, \dots, a_n$ se definuje:

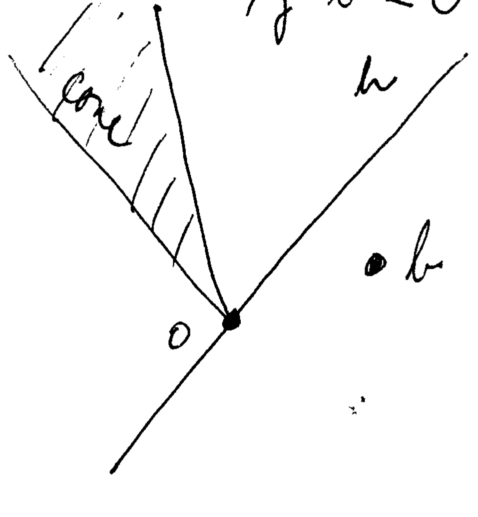
$$\text{cone}(a_1, \dots, a_n) = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n;\ t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0\}.$$

Farkasovo lemma geometricky Nastane jediná možnost z 1, 2.

1. $b \in \text{cone}(a_1, \dots, a_n)$
2. Existuje nadrovina h obsahující $0 \in \mathbb{R}^m$, t. j.,

$$h = \{x \in \mathbb{R}^m;\ y^T x = 0\} \text{ pro nějaké } y \in \mathbb{R}^m$$

tak že: $\text{cone}(a_1, \dots, a_n) \subseteq \{x;\ y^T x \geq 0\}$ a zároveň $y^T b < 0$.



a_i: sloupec matice A

V. o oddělování $\Rightarrow$ existuje nadrovina h' striktně oddělující $\text{cone}(a_1 \dots a_n)$, $\{b\}$. h' "posuneme" do $0 \in \mathbb{R}^m$.

Varianty F.L.

- Existuje $x \geq 0$, $Ax \leq b \iff (\forall y \geq 0)(y^T A \geq 0 \Rightarrow y^T b \geq 0)$
- Existuje $x : Ax \leq b \iff (\forall y \geq 0)(y^T A = 0 \Rightarrow y^T b \geq 0)$.

Všechny 3 varianty F.L. jsou jednoduše ekvivalentní elementárními převody, stejně jako formulace LP.

Stejně na sebe převoditelné varianty věty o dualitě pro různé formulace LP.

	(P)	(D)
proměnné	$x_1 \dots x_n$	$y_1 \dots y_m$
matice	A	A^T
pravá strana	b	c
cílová funkce	$\max c^T x$	$\min b^T y$
podmínky	i-tá podmínka $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j-tá podmínka $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

Farkasovo lemma a dualita a LP

F.L. Systém $Ax \leq b$ má řešení $x \in \mathbb{R}^n \iff$ $\forall y \geq 0 \in \mathbb{R}^m$ splňující $y^T A = 0$ platí $y^T b \geq 0$

Přípustnost LP (z F.L.)

Úloha $\max\{c^T x;\ Ax \leq b\}$ nemá přípustné řešení $\iff$ existuje nezáporná kombinace y podmínek $Ax \leq b$ taková, že $y^T A = 0$ a $y^T b < 0$.

Omezenost LP (z duality)

- jestliže úloha $\max\{c^T x;\ Ax \leq b\}$ je omezená a přípustná, potom c lze získat jako nezápornou kombinaci y řádků matice A, t.j. $c^T = y^T A$.
- jestliže existuje $y \geq 0$ splňující $c^T = y^T A$, pak je úloha $\max\{c^T x;\ Ax \leq b\}$ omezená.

F.L. plyne z duality

$$\max\{0^T x;\ Ax \leq b\} = \min\{b^T y;\ A^T y = 0^T,\ y \geq 0\}.$$

Dualitu také lze dokázat z F.L.

Důkaz V. o dualitě ze Simplexové Metody

Stačí ukázat: úloha (P) je přípustná a omezená

~~Věty slabé duality~~

$$\Big\Downarrow (*)$$

úloha (D) je přípustná (a i omezená ze slabé věty o dualitě) a optimální hodnoty se rovnají.

Proč to stačí ukázat: slabá věta o dualitě a důležité pozorování (dokažte si jako cvičení): "DD = P" "duální úloha k (D) je (P)".

Důkaz (*) (1) Převedeme (P) do rovnicového tvaru:

$$\max \bar{c}^T \bar{x}; \quad \bar{A}\bar{x} = b, \ \bar{x} \geq 0; \quad \bar{A} = (A|I_m); \ \bar{c} = (c|0\dots0).$$

(2) Tato úloha je též přípustná a omezená $\Rightarrow$ Simplexová metoda (Blandovo pravidlo) najde optimální řešení $\bar{x}^*$ odpovídající bázi B. Prvních n souřadnic $\bar{x}^*$ označme x^*. Platí, že x^* je optimální řešení (P).

Platí: ve výsledné tabulce je vektor $\boxed{r \leq 0}$, kde r označíme vektor v poslední z-řádce tabulky.

Implikace „$\overset{*}{\Rightarrow}$" plyne z lemma:

Lemma. Nechť $y^* = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T$. Potom y^* je přípustné řešení úlohy (D) a platí $c^T x^* = b^T y^*$.

Důkaz. Platí $\bar{x}_B^* = \bar{A}_B^{-1} b$ a $\bar{x}_N^* = 0$ $[N = \{1, \dots, n+m\} \setminus B]$

Tudíž:

$$\underline{\underline{c^T x^*}} = \bar{c}^T \bar{x}^* = \bar{c}_B^T \bar{x}_B^* = \bar{c}_B^T (\bar{A}_B^{-1} b) = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1}) b = \underline{\underline{(y^*)^T b}}$$

Zbývá ukázat $A^T y^* \geq c$, $y^* \geq 0$. Tyto podmínky lze zapsat jako $\bar{A}^T y^* \geq \bar{c}$.

Dosazením za y^* dostaneme $\bar{A}^T y^* = \bar{A}^T (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1})^T = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A})^T$. Označme tento vektor $w = (w_1, \dots, w_{n+m})$.

1. $w_B = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_B)^T = (\bar{c}_B^T I_m)^T = \bar{c}_B$.
2. $w_N = (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_N)^T = \bar{c}_N - r \geq \bar{c}_N$ protože $r = \bar{c}_N^T - (\bar{c}_B^T \bar{A}_B^{-1} \bar{A}_N)^T$, a navíc $r \leq 0$ dle podmínky optimality tabulky. $\boxtimes$