Úloha Diskrétní Optimalizace (1)

Je dána konečná množina X, $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ a $w : X \to \mathbb{Q}$.
Najdi $\max w(A);\ A \in \mathcal{F}$ $\left[w(A) = \sum_{x \in A} w(x) \right]$.

Příklad.

Najdi maximální párování v grafu... a mnoho dalších. Spíš je těžké najít optimalizační úlohu která není tohoto typu.

Základní pozorování:

Každá úloha diskrétní optimalizace je úloha LP.

Důkaz. Nechť

$$P_{\mathcal{F}} = \mathrm{conv}(\chi_A;\ A \in \mathcal{F}) \subseteq \mathbb{R}^X;$$

χ_A je charakteristický vektor $A \subseteq X$, t.j.
$(\chi_A)_i = 1$ pro $i \in A$; $(\chi_A)_i = 0$ pro $i \in X \setminus A$.

(1) Platí: $\max w(A) : A \in \mathcal{F}$ = $\max w^T x : x \in P_{\mathcal{F}}$. [jednoduchá vlastnost konvexity]

(2) Věta (Minkowski – Weyl)
Nechť $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Q je omezený konvexní mnohostěn právě když existuje $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že V je konečná a $Q = \mathrm{conv}(V)$.

[konv. mnohostěn: průnik konečně mnoha poloprostorů]

Toto dokazuje Základní pozorování. $\boxtimes$

(2) <u>Důkaz Věty Minkowski-Weyl</u> |

indukcí dle $d = \dim Q$ = dimenze afinního obalu Q.

(a) Je-li $\dim Q \le 0$, potom $|Q| \le 1$ a vem $V = Q$.

(b) Nechť $d \ge 1$ a L je afinní obal Q, t.j. $Q \subseteq L$ a $\dim L = d$. $\boxed{„\Rightarrow“:}$

Nechť $Q = \{x;\ a_i x \le b_i,\ i = 1, \dots, m\}$.

Nechť $P_i = \{x;\ a_i^T x \le b_i\}$, $R_i = \{x;\ a_i^T x = b_i\}$.

Je-li celé $Q \subseteq R_i$ potom i $L \subseteq R_i$ protože R_i je afinní prostor.

Nechť $M = \{i;\ Q \cap R_i \ne Q\}$.

Pro $i \in M$ je $\dim(Q \cap R_i) \le \dim(L \cap R_i) \le d-1$ protože afinní prostor $L \cap R_i \subsetneq L$ [protože $Q \cap R_i \ne Q$].

<u>Tudíž</u>: Pro $i \in M$ najdeme dle <u>indukčního předp.</u> konečnou V_i že $Q \cap R_i = \mathrm{conv}(V_i)$.

Nechť $V = \bigcup_{i \in M} V_i$. $\boxed{\text{Zbývá}: Q = \mathrm{conv}(V)}$

(i) $V_i \subseteq Q$ ~~pro~~ každé i, tudíž $V \subseteq Q$ a $\mathrm{conv}(V) \subseteq Q$.

(ii) Nechť $x \in Q$ a p je přímka splňující $p \subseteq L$ a $x \in p$ [to lze neb $\dim L \ge 1$].

neb pro $i \notin M$, $p \subseteq L \subseteq R_i$

$x \in p \cap Q = p \cap (\bigcap P_i;\ i \in M) = \bigcap_{i \in M} (p \cap P_i)$.

Každé $p \cap P_i$ je polopřímka, tudíž $p \cap Q$ je úsečka ~~[illegible]~~ s koncovými body y, z: $y \in R_{i_1}$, $z \in R_{i_2}$.

Dle indukce $y, z \in \mathrm{conv}(V)$ a tak i $x \in \mathrm{conv}(V)$.

$\boxed{\text{„}\Leftarrow\text{"}:}$ (Druhá implikace Věty M+W) ③ ④

Máme danou konečnou $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nechť

$$H = \left\{ \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^{n+1} : a \in [-1,1]^n, b \in [-1,1], (\forall v \in V)(a^T v \le b) \right\}.$$

H je omezený konvexní mnohostěn! Tudíž dle „$\Rightarrow$" existuje konečná $W \subseteq H$ že $H = \mathrm{conv}(W)$.

Nechť

$$Y = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \left(\forall \binom{a}{b} \in W\right)(a^T x \le b) \right\}.$$

Ukážeme: $\mathrm{conv}(V) = Y$; to stačí protože $\mathrm{conv}(V)$ je ~~z~~jevně omezená.

---

(1) $\mathrm{conv}(V) \subseteq Y$: $V \subseteq Y$ dle definice H a Y konvexní, tudíž i $\mathrm{conv}(V) \subseteq Y$.

---

(2) $\mathrm{conv}(V) \supseteq Y$: ~~SPOREM~~. Nechť $x \notin \mathrm{conv}(V)$.

Dle Věty o oddělování existuje a, b že $\boxed{a^T x > b}$ a $(\forall v \in V)(a^T v < b)$.

! Můžeme předp. že b a všechny koeficienty a jsou v absolutní hodnotě ≤ 1. !

Tudíž $\binom{a}{b} \in H$. Bod x tudíž nesplňuje jednu z nerovnic representovanou v H. Tudíž x nesplňuje jednu z nerovnic representovanou v W a tudíž $x \notin Y$. $\boxtimes$

Lemma. Každý konvexní mnohostěn P je konvexním obalem svých vrcholů. Speciálně každý konvexní mnohostěn má vrchol.

Důkaz. Dle Minkowski-Weyl Věty platí že $P = conv(X)$ pro nějakou konečnou X. Nechť v je vrchol P, a nechť v je jediným optimem úlohy $\max c^T x$; $x \in P$. Potom $v \notin conv(P \setminus v)$ a tudíž $v \in X$. Vezměme X minimální, že $P = conv(X)$. Nechť $z \in X$. Nutně $z \notin conv(X \setminus \{z\})$. Tudíž existuje oddělující nadrovina $a^T x = b$ splňující

- $a^T y < b$ pro každé $y \in X \setminus \{z\}$
- $a^T z > b$. Z konvexity $(\forall y \in P \setminus \{z\})(a^T y < a^T z)$.

Tudíž:

To znamená že z je vrchol P.

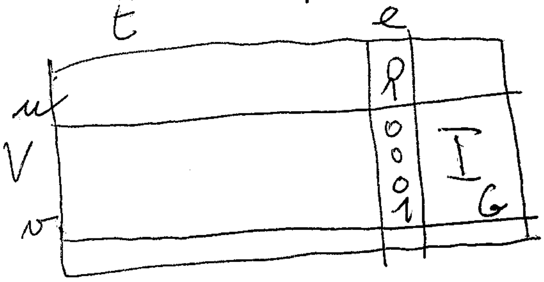
Nyní budeme zkoumat mnohostěny které mají všechny vrcholy celočíselné.

Proč je to důležité?

Příklad. (Bipartitní) graf $G=(V_1,V_2,E)$, $w: E \to \mathbb{Q}$.

Najdi maximální párování.

Celočíselné Programování	LP Relaxace
$\max w^T x$	$\max w^T x$
$I_G x \le 1$	$I_G x \le 1$
$x \in \{0,1\}$	$x \ge 0$



$e = \{u,v\}$

Nechť $P_M = \{x ; I_G x \le 1, x \ge 0\}$. P_M je mnohostěn.

Pozorování Má-li P_M všechny vrcholy celočíselné, potom LP relaxace najde ~~ne~~ hodnotu maximálního párování.

Důkaz ~~$\max(w^T x ; x \in P_M)$ se nabývá na stěně P_M~~

Nechť z je optimální bod, t.j. $z \in P_M$ a

$$w^T z = \max(w^T x ; x \in P_M).$$

Dle minulé věty platí že z je konvexní kombinace vrcholů P_M. Tudíž existuje vrchol v, že

$$w^T v = \max(w^T x ; x \in P_M).$$

Vrchol v je celočíselný a každý celočíselný bod P_M je char. vektor párování. $\boxtimes$

Konvexní Polyhedron P ~~se~~ je racionální, je-li $P = \{x;\ Ax \le b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ a všechny složky A i b jsou racionální.

Věta P racionální konvexní polyhedron. Potom všechny vrcholy jsou racionální a pro každý vrchol v existuje racionální w, že v je jediné řešení úlohy $\max w^T x$, $x \in P$.

Důkaz. Větu dokážeme pro standardní tvar a naznačíme, jak ji dokázat obecně.

- Nechť $P = \{x;\ Ax = b,\ x \geq 0\}$ je dán standardním tvarem. Vrcholy v odpovídají bázickým řešením, t.j. existuje $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ že v_B je jediné řešení soustavy $A_B v_B = b$, a $v_i = 0$ pro $i \notin B$. Bod v je tedy nutně racionální. Dále definujme w předpisem

$$w_i = -1 \text{ pro } i \notin B,\quad w_i = 0 \text{ pro } i \in B.$$

Potom v je jediné řešení úlohy $\max(w^T x;\ x \in P.)$

- Dále ~~nez~~ Větu dokážeme obecně, ale použijeme Větu (*) na str. 7; a Větu (*) nedokážeme.

(+)

Pro obecný racionální konvexní polyhedron $P = \{x ; Ax \le b\}$ potřebujeme porozumět $\boxed{\text{vrcholům}}$ P. A je $(m \times n)$

$\boxed{\text{Definice}}$ Nechť $P = \{x ; Ax \le b\}$. Bod ~~z~~ $z \in P$ nazveme <u>bázické ~~[illegible]~~ přípustné řešení</u> jestliže z splňuje n lineárně nezávislých podmínek s rovností, t. j. existuje čtvercová $(n \times n)$ podmatice A' matice A, že $\det A' \neq 0$ a $A'z = b'$, kde b' je příslušný podvektor vektoru b.

$\boxed{\text{Důležité}}$ • P nemusí mít žádné vrcholy: udělejte si příklad!

• Bázické řešení úlohy ve standardním tvaru je přesně ~~bázické~~ řešení dle obecné definice. (cvičení pro doma)

$\boxed{\text{Věta (+)}}$ Nechť $P = \{x ; Ax \le b\}$, a nechť $v \in P$. v je vrchol $P \iff v$ je bázické přípustné řešení.

~~Důkaz. Je-li v bázické přípustné řešení dané regulární (n×n) podmaticí A', potom nechť c je součet řádků A', a nechť W je součet složek příslušného vektoru b'. Potom pro každé y ∈ P víme že $c^T y \le W$ a jestliže $c^T y = W$ potom y splňuje každou nerovnost $A'x \le b'$ s rovností. Tudíž y = v (protože A' regulární) a tudíž v je vrchol.~~

8

Důkaz Věty ze str. 6 (obecný případ).

Nechť v je vrchol $P = \{x;\ Ax \le b\}$. Podle Věty (*) (str. 7) je v bázické řešení; nechť v je dané ~~čtv~~ $(n \times n)$ regulární maticí A'. Nechť c je součet řádků A', a nechť W je součet složek příslušného vektoru b'. Potom pro každé $y \in P$ víme že $c^T y \le W$ a jestli $c^T y = W$ potom y splňuje každou nerovnost systému $A'x \le b'$ s rovností. Tudíž $y = v$ protože A' je regulární. ~~To znamená~~

To znamená že v je jediné optimum pro $\max(c^T x;\ x \in P)$, a c je racionální. $\boxtimes$

Poznámka: Uvědomte si že tato úvaha dokazuje „$\Leftarrow$" Věty (*): každé bázické řešení je vrchol.

~~Mnohostěn nazveme racionální, je-li definován racionálním lineárním systémem [$P = \{x : Ax \le b\}$, vš. čísla v A, b jsou racionální]~~

$\boxed{\text{Odteď budou všechny mnohostěny racionální a konvexní.}}$

Mnohostěn je celočíselný, má-li všechny vrcholy celočíselné.

Mnohostěn: omezený polyhedron ~~polytop~~

Věta. ~~Racionální~~ Mnohostěn P je celočíselný právě když pro každý celočíselný vektor w, $\max\{w^T x ; x \in P\}$ je celé číslo.

Důkaz. Zřejmě je to nutná podmínka. Nechť v vrchol P (P má vrcholy!) w celočíselný takový, že v je jediné řešení $\max\{w^T x ; x \in P\}$. Upravme w (násobení ~~x~~ velkým číslem) tak aby

$$w^T v > w^T u + u_1 - v_1$$ pro všechny vrcholy $u \in P$, $u \neq v$. Tudíž pro $\bar{w} = (w_1 + 1, w_2, \dots, w_n)$, v je ~~jediné řešení~~ optimální řešení úlohy $\max\{\bar{w}^T x ; x \in P\}$. Tudíž $w^T v$ a $\bar{w}^T v = w^T v + v_1$ jsou celá čísla. Tudíž v_1 je celé číslo. Stejně postupujeme pro $v_2, \dots, v_n$. $\boxtimes$

(10)

Věta. A celočíselná, $m \times m$, $\det A \neq 0$. Potom $A^{-1} b$ je celočíselný pro každý $b \in \mathbb{Z}^m$ právě když $\det A \in \{1, -1\}$

Důkaz. $\Leftarrow$ z Cramerova pravidla

$\Rightarrow$: $A^{-1} e_i$ celočíselný $\Rightarrow$ i-tý ~~řádek~~ sloupec A^{-1} celočíselný $\Rightarrow A^{-1}$ celočíselná. Tudíž oba $\det A$, $\det A^{-1}$ celočíselné. Ale $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$. $\boxtimes$

Definice A s lineárně nezávislými řádky je ~~modulární~~ unimodulární je-li A celočíselná a pro každou bázi B, $\det A_B \in \{1, -1\}$.

Věta A celočíselná s lin. nez. řádky. Potom polyhedron $\{x; Ax = b, x \geq 0\}$ je celočíselný pro každý celočíselný $b \iff A$ je unimodulární.

Důkaz. "$\Leftarrow$": každý vrchol je určen jediným řešením $A_B x_B = b$ pro nějakou bázi B.

Tudíž $x_B = A_B^{-1} b$, $x_i = 0$ pro $i \notin B$.

Je-li A unimodulární, platí že A_B^{-1} je celočíselná (Cramerovo pravidlo) a tudíž vrchol x je celočíselný.

"$\Rightarrow$". dle předešlé věty stačí: $A_B^{-1} b$ je celočíselný pro každou bázi B a celočíselný vektor b.

To ukážeme takto: nechť y je celočíselný vektor splňující $y + A_B^{-1} b \geq 0$. Nechť ($y \in \mathbb{R}^m$)

$\bar{b} = A_B(y + A_B^{-1} b)$. Vektor $\bar{b}$ je celočíselný protože A, b jsou celočíselné.

~~Rozšíříme y na $x \in \mathbb{R}^n$ tím že položíme~~ Definujme $x_B = y + A_B^{-1} b$

$x_i := y_i$, $i \in B$, $x_i = 0$, $i \notin B$. Potom

$\boxed{Ax = \bar{b},\ x \geq 0}$ Tudíž ~~dle~~ x je bázické řešení soustavy $(Ax = \bar{b},\ x \geq 0)$, a tudíž x je vrchol polyhedronu $\{x \geq 0;\ Ax = \bar{b}\}$. Tudíž x je celočíselný, a tudíž $A_B^{-1} b$ je celočíselný. ⊠

Definice Matice A je <u>totálně unimodulární</u> ~~jestliže~~ jestliže každá její čtvercová podmatice má determinant $0, 1$, nebo -1. [Říkáme: A je TU (totálně unimod.)]

<u>Věta</u> (Hoffman-Kruskal) A je $m \times n$ celočíselná. Potom $P = \{x;\ Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ je celočíselný pro každý celočíselný $b \iff A$ je totálně unimodulární (TU).

<u>Důkaz.</u> Dodáme pomocné proměnné.

P je celočíselný $\iff P' = \{x:\ [A|I]x = b,\ x \geq 0\}$ je celočíselný. To je dle předešlé věty právě když matice $[A|I]$ je unimodulární, a to je jednoduše právě když matice A je TU. ⊠

Příklad 1

Nechť každá komponenta A_{ij} matice A patří do $\{0,1,-1\}$. Navíc nechť v každém sloupci je nejvýše jedna $+1$ a nejvýše jedna -1. Potom A je TU.

Například matice incidence orientovaného grafu: $D=(V,A)$, $A \subset V^2$:

$$I_D \quad \begin{array}{c|c} & a \\ \hline & 0 \\ x & 1 \\ & 0 \\ & 0 \\ y & -1 \\ & 0 \end{array} \qquad a=(x,y)$$

$$x \longrightarrow y$$

$\boxed{\text{TOKY V SÍTÍCH}}$

~~Příklad 2. Nechť každá komponenta A_{ij} matice A patří do $\{0,1\}$ a každý sloupec má přesně dvě $+1$. Potom A je TU.~~

~~Například matice~~

Příklad 2. Matice incidence bipartitního grafu $G=(V_1,V_2,E)$ je TU.

$$I_G: \quad \begin{array}{c|c} & e \\ \hline & 0 \\ V_1\ x & 1 \\ & 0 \\ & 0 \\ V_2\ y & 1 \\ & 0 \end{array} \qquad e=\{x,y\}.$$

Důsledek. G je bipartitní. Potom $\{x;\ I_G x \le 1,\ x \ge 0\}$ je celočíselný.

Cutting Planes

Úloha celočíselného programování

$$\max \{ w^T x \, ; \, Ax \le b, \; x \in \mathbb{Z}^n \}.$$

Účelová fce w je dána, nezajímají nás jiné (všechny) celočíselné účelové fce.

<u>Myšlenka</u>: je-li $\boxed{6x_1 + 8x_2 \le 27}$ podmínka, potom všechna celočíselná řešení splňují

$$\boxed{3x_1 + 4x_2 \le \lfloor 27 \rfloor = 13}$$

Definice Gomory-Chvátal řez (cutting plane)

Mějme systém $Ax \le b$, A je $(m \times n)$.

Nechť $y \ge 0$, $c = y^T A$, $d = y^T b$.

Je-li c celočíselné, potom $c^T x \le \lfloor d \rfloor$ je splněno pro každé celočíselné $x : Ax \le b$.

Podmínku $c^T x \le \lfloor d \rfloor$ nazveme řezem.

Vektor $y \ge 0$ je <u>odvození</u> podmínky $\boxed{c^T x \le \lfloor d \rfloor}$

Po odvození můžeme podmínku $c^T x \le \lfloor d \rfloor$ dodat do systému $Ax \le b$ a odvozovat další podmínky.

Odvodíme-li $w^T x \le t$ po k krocích tohoto postupu, nazveme vektory y^i, $i = 1, \dots, k$ <u>důkaz</u> pro $w^T x \le t$.

Věta 1. Nechť $P = \{x ; Ax \le b\}$ je racionální mnohostěn a $w^T x \le t$, w celočíselná, je splněná pro každé $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$. Potom existuje důkaz (pomocí řezů) podmínky $w^T x \le t'$ pro nějaké $t' \le t$. (bez důkazu)

Věta 2. $P = \{x ; Ax \le b\}$ racionální mnohostěn, $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$. Potom existuje důkaz podmínky $\boxed{0^T x \le -1}$. (bez důkazu)

Chvátalův rank

Nechť P je racionální polyhedron, a P_I konvexní obal celočíselných bodů P.

Nechť $P' = \{x \in P ;\ x \text{ splňuje každý řez}\}$.

Věta 3. Je-li P racionální polyhedron, potom i P' je racionální polyhedron. důkaz na str. 15

Nechť $P = P^{(0)}$, $P' = P^{(1)}$, $P^{(1)'} = P^{(2)} \dots$.

Věta 4. Je-li P racionální mnohostěn, potom $P^{(k)} = P_I$ pro nějaké k.

Důkaz Důsledek Věty 1 a Minkowski - Weyl věty. ⊠

Nejmenší k : Chvátalův rank P.

$\boxed{\text{Důkaz Věty 3}}$

$P = \{x;\, Ax \le b\}$, A, b celočíselné (bez újmy na obecnosti). Ukážeme: (*) P' je definován podmínkami $Ax \le b$ a množinou nerovnic tvaru

$$(y^T A)x \le \lfloor y^T b \rfloor \text{ pro } 0 \le y < 1 \text{ a } y^T A \text{ celočíselné.}$$

Takových nerovnic je jen konečně mnoho, protože množina $\{y^T A,\ 0 \le y < 1\}$ je omezená; obsahuje tudíž jen konečně mnoho celočíselných vectorů.

Důkaz (*). Nechť $w^T x \le \lfloor t \rfloor$ je řez odvozený z $Ax \le b$ vektorem $\bar{y} \ge 0$. Nechť $\bar{y}' = \bar{y} - \lfloor \bar{y} \rfloor$. Potom

$w' = (\bar{y}')^T A = w - (\lfloor \bar{y} \rfloor)^T A$ je celočíselný a

$t' = (\bar{y}')^T b = t - (\lfloor \bar{y} \rfloor)^T b$ se liší od t o celé číslo.

Tudíž řez $(w')^T x \le \lfloor t' \rfloor$ odvozený vektorem $\bar{y}'$ dohromady s platnou nerovností

$$((\lfloor \bar{y} \rfloor)^T A)\, x \le (\lfloor \bar{y} \rfloor)^T b$$

se sečte na řez $w^T x \le \lfloor t \rfloor$. ⊠

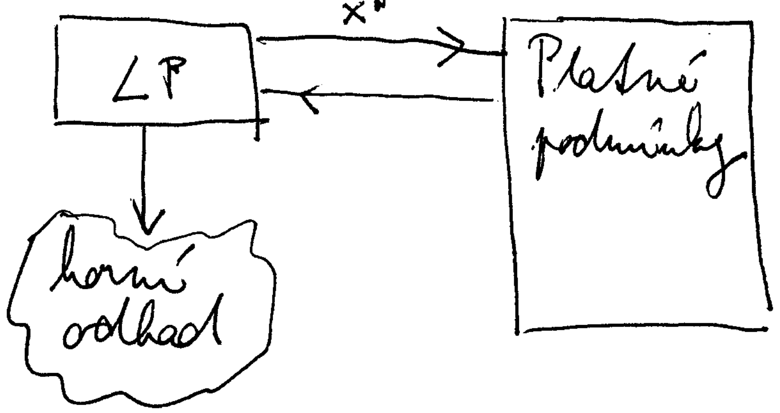
Algoritmy založené na řezech

max $\{w^T x \,;\, x \in P,\ x$ celočíselné$\}$, P polyhedron.

x^*: optimální hodnota LP relaxace

x^* celočíselné $\Rightarrow$ jsme hotovi.

<u>Jinak</u>: najdeme podmínku $c^T x \leq d$ platnou pro každé $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$, ale <u>ne</u> pro x^* ($c^T x^* > d$).



Nacházení takových platných podmínek je řemeslo lidí pracujících v diskr. optimalizaci.

Ekvivalence separace a optimalizace

Problém separace Je dán racionální mnohostěn $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, buď odpověz $v \in P$ nebo najdi racionální $w \in \mathbb{R}^n$ že $w^T x < w^T v$ pro každé $x \in P$.

Problém optimalizace Je dán racionální ~~omezený~~ mnohostěn $P \subseteq \mathbb{R}^n$, racionální $w \in \mathbb{R}^n$, buď najdi $x^* \in P$ maximalizující $w^T x$; $x \in P$, nebo odpověz že $P = \emptyset$.

Přípustná třída mnohostěnů: $\mathcal{P} = \{P_t ; t \in \mathcal{O}\}$

$\mathcal{O}$: třída objektů (např. třída všech grafů)

$\mathcal{P}$ přípustná jestliže pro každé $P_t \in \mathcal{P}$ spočítáme v polynomiálním čase (v t) čísla n_t, s_t, že $P_t \subset \mathbb{R}^{n_t}$ a $P_t = \{x ; Ax \leq b\}$ kde každé číslo má "velikost" $\leq s_t$.

Separace polynomiálně řešitelná v $\mathcal{P}$, je-li řešitelná pro každé (t, v) v čase polynomiálním ve velikosti (t, v). [Stejně Optimalizace]

Věta Pro každou přípustnou třídu $\mathcal{P}$ mnohostěnů, problém separace je polynomiálně řešitelný $\Leftrightarrow$ problém optimalizace je polynomiálně řešitelný. (bez důkazu)