Determinanty

1683 [Gottfried Wilhelm Leibniz, Seki Kowa z Japonska]

- ⊛ řešení soustav lineárních rovnic
- ⊛ zásadní konstrukce lidského poznání; aplikace nejen v matematice ale i ve fyzice, computer science, optimalizace
- ⊛ jméno vymyslel Gauss 1801.

Definice

[S_n : množina všech permutací $\{1,\dots,n\}$]

$A \in \mathbb{T}^{n\times n}$

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} =$$

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{\#\text{inverzí}}$$

Značení:

$$\det(A) \overset{\text{zn}}{=} |A|$$

$\boxed{\text{Příklady}}$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ + a_{31}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} \\ - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Celkově $n!$ sčítanců $\left[n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \right]$

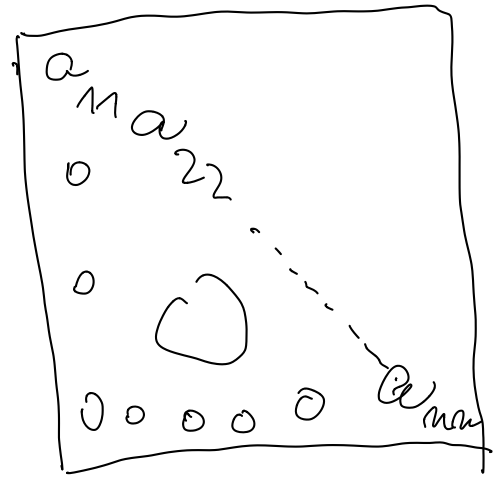
ALE: existuje mnohem rychlejší postup (algoritmus), Gaussova eliminace. [Polynomiální alg.]

Pozorování 1.

$A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ horní trojúhelníková. Potom

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Důkaz.



- $\operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\pi(n) = n.$$

- Tudíž nutně $\pi(n-1) = n-1$
- Opakováním tohoto postupu dostaneme že $\pi(i) = i$, $i = n, n-1, n-2, \dots, 1$. ⊠

Tudíž ⊛ determinant horní trojúhelníkové matice se dá jednoduše spočítat.

⊛ To je myšlenka Gaussovy eliminace

Pozorování 2 Determinant transpozice.

$A \in \mathbb{T}^{n \times n}$. Potom $\det(A^T) = \det A$

$\boxed{\text{Důkaz}}$

$$\det(A^T) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} A^T_{i\,\pi(i)} =$$

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i)\,i} \overset{(*)}{=}$$

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\pi^{-1}(i)} =$$

$$\sum_{\alpha \in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\alpha(i)}. \quad \boxtimes$$

(*) DŮLEŽITÉ: těleso $\mathbb{T}$ je komutativní.

Tyto úvahy jsou důležité v teoretické fyzice.

Dále platí: $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$

(*) $\boxed{\text{Neplatí}}$ $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

$\boxed{\text{Ale}}$ Případy kdy platí rovnost jsou zásadně důležité:

(a) Pro řádkovou linearitu determinantu a Gaussovu eliminaci [bude]

(b) Pro algebraickou a determinantskou složitost polynomů [Valiant, nebude]

$\boxed{\text{Věta}}$ Řádková linearita determinantu

$A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{T}^{n}$. Potom pro každé $i \le n$

$$\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))$$

A_{i*} značí i-tý řádek matice A

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{i1}+b_1 & \dots & a_{in}+b_n \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \; \boxed{\text{řádková linearita}} \; = \det A + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ b_1 & \dots & b_n \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Důkaz.</u> $\det(A + e_i b^T) =$

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots (a_{i\pi(i)} + b_{\pi(i)}) \cdots a_{n\pi(n)} =$$

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^{n} a_{j\pi(j)} +$$

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots b_{\pi(i)} \cdots a_{n\pi(n)} =$$

$$\det A + \det(A + e_i(b^T - A_{i*})).$$

$\boxtimes$

$\circledast$ $\det(A) = \det(A^T) \Rightarrow$

determinant je i sloupcově lineární

(*) Výpočet det pomocí Gaussovy eliminace

- Výsledná matice v odstupňovaném tvaru je horní trojúhelníková $\Rightarrow$ její det je jednoduchý.
- Zbývá: jak hodnotu det ovlivní elementární řádkové úpravy:

Věta $A \in T^{n \times n}$, A' vznikne elementární řádkovou úpravou z A.

(1) Vynásobení i-tého řádku $\alpha \in T$:

$$\det(A') = \alpha \det(A)$$

(2) Výměna i-tého a j-tého řádku:

$$\det(A') = -\det(A)$$

(3) Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, pro $i \neq j$: $\det(A') = \det(A)$.

Důkaz: Není těžký, zkuste sami!

Pro (3) je potřeba: má-li A dva stejné řádky, je $\det(A) = 0$:

jednoduché pro tělesa charakteristiky $\neq 2$.

Obecně: nechť S'_n je množina sudých permutací z S_n. Potom S_n lze rozložit $[S_n = S'_n \,\dot{\cup}\, S^{\circ}_n]$ kde

$S^{\circ}_n = \{\pi \circ t;\ \pi \in S'_n\}$ a t je transpozice $(i\ j)$.

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S'_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} + \sum_{\pi \in S'_n} \operatorname{sgn}(\pi \circ t) \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\pi\circ t(i)}$$

$$= \sum_{\pi \in S'_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} - \sum_{\pi \in S'_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}.$$

$\boxtimes$

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 5$$

Důsledek: Matice A je <u>regulární</u> právě když $\det(A) \neq 0$.

<u>Důkaz</u>. A převedeme el. úpravami na odstupňovaný tvar A'; el. úpravy nemění nenulovost determinantu.

A je regulární $\Leftrightarrow$ A' má na diagonále nenulová čísla $\Leftrightarrow$ $\det A' \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$. $\boxtimes$

<u>Věta</u> $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$;

speciálně $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

<u>Důkaz.</u>

- Je-li A matice elementární úpravy, věta platí [rozbor el. úprav v důkazu předchozí věty]
- A singulární $\overset{\circledast}{\Rightarrow}$ AB singulární $\Rightarrow \det(AB) = 0 = 0 \cdot \det B = \det A \det B$

$\circledast$ bylo: rozeberte případy že B singulární; B regulární

- Je-li A regulární, pišme $A = E_1 \cdots E_k$, E_i elementární.

Větu dokážeme indukcí dle k.

$k = 1$ HOTOVO

ind. krok: $\det AB = \det(E_1 \cdots E_k B) =$

$\det(E_1(E_2 \cdots E_k B)) = \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_k B)$

$\overset{\text{ind}}{=} \det(E_1) \cdot \det(E_2 \cdots E_k) \det(B) = \det(E_1 \cdots E_k) \det B =$

$\det(A)\det(B)$. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta}}$ Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku. $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, $n \geq 2$.

Pro každé $i = 1, \ldots, n$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij}) ;$$

A^{ij} matice vzniklá z A vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce.

[Podobně rozvíjet podle sloupce]

Důkaz.

① i-tý řádek A je $e_j^T = (0 \cdots 0 \overset{j}{1} 0 \cdots 0)$

$$A' = \begin{pmatrix} A^{ij} & \vdots \\ 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = (-1)^{i+j} \det(A')$$

el. úpravami (výměna řádků a sloupců)

Navíc $\det(A') = \det(A^{ij})$ z definice det.

② Řádková linearita determinantu:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} & \vdots & & \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \end{pmatrix} + \cdots + \det\begin{pmatrix} & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ & & & \vdots \end{pmatrix} =$$

$$a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A^{i1}) + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}\det(A^{in}).$$

$\boxtimes$

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{4+3}(-4)\begin{vmatrix}1&2&4\\1&2&2\\2&5&5\end{vmatrix} + (-1)^{4+4}(-4)\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&1\\2&5&5\end{vmatrix}$$

APLIKACE (2. přednáška)

[A_{i*} značí i-tý řádek A

A_{*i} značí i-tý sloupec A

$A + (b - A_{*i})e_i^T$ je matice kde nahradíme i-tý sloupec vektorem b.

Věta (Cramerovo pravidlo) (1750)

$A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ regulární, $b \in \mathbb{T}^n$.

Řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem

$$x_i = \frac{\det\left(A + (b - A_{*i})e_i^T\right)}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n$$

Důkaz. Řešení existuje a je jediné.

Rozepíšeme

$$\sum_{j=1}^{n} A_{*j} x_j = b.$$

$$\det\left(A + (b - A_{*i}) e_i^T\right) = \det\left(A_{*1} \cdots \middle| b \middle| \cdots A_{*n}\right) =$$

$$\det\left(A_{*1} \cdots \middle| \sum_{j=1}^{n} A_{*j} x_j \middle| \cdots \middle| A_{*n} \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \det\left(A_{*1} \middle| \cdots \middle| A_{*j} \middle| \cdots \middle| A_{*n}\right) x_j$$

Pro $j \neq i$ je sumand nula (2 stejné sloupce)

$$\Downarrow$$

$$\det\left(A + (b - A_{*i}) e_i^T\right) = \det\left(A_{*1} \middle| \cdots \middle| A_{*i} \middle| \cdots \middle| A_{*n}\right) x_i =$$

$$\det(A)\, x_i. \quad \boxtimes$$

Důsledek 1. Zobrazení $(A,b) \to A^{-1}b$ je spojité na definičním oboru regulárních matic [protože složky řešení dostaneme pomocí aritmetických operací]

Důležitá otázka: jakou složitost má řešení soustav lineárních rovnic? Nechť A regulární.

$\boxed{\text{Věta}}$ Potřebujeme-li k zápisu vstupu (A,b) K bitů potom řešení $A^{-1}b$ má zápis pomocí polynomiálně mnoha bytů vzhledem ke K.

Návod: Pomocí Cramerova pravidla

- [zkuste rozmyslet pro případ kdy $A_{ij} \in \{0,1\}$, $b_j \in \{0,1\}$ pro každé i,j]
- [Pak odvoďte obecný případ $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^n$]

Velikost vstupu (A, b)

- Je-li č přirozené číslo potom k jeho zápisu potřebujeme $\lceil \log č \rceil$ bitů
- Je-li $r = \frac{a}{b}$ zlomek potom k jeho zápisu potřebujeme $\lceil \log a \rceil + \lceil \log b \rceil$ bitů
- Označme $V(r)$ počet bitů nutných k zápisu zlomku r.
- Je-li $v = (r_1, \dots, r_n)$ vektor zlomků potom k jeho zápisu potřebujeme $V(v) = \sum_{i=1}^{n} V(r_i)$ bitů
- Stejně pro matici [A.j n^2-vektor]

Věta Gaussovu eliminaci lze provádět tak, že k zápisu každé matice během výpočtu stačí pouze polynomiální počet bitů (v K).

Návod Po každém výpočtu zkraťte zlomky. nezkouší se

Řešení soustav lineárních rovnic je koncepčně zásadní pro **lineární Programování**

Úlohu LP lze psát ve tvaru

(*) $\boxed{\text{Najdi } x \geq 0 : \ Ax = b}$

dozvíte se v přednášce lineární Prog.

Adjungovaná Matice

Definice $A \in T^{n \times n}$, $n \geq 2$. <u>Adjungovaná matice</u> $\operatorname{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ji})$, $i,j = 1,\dots,n$

kde A^{ji} vznikne z A vynecháním j-tého řádku a i-tého sloupce.

Věta $A \in T^{n \times n} \Rightarrow A \operatorname{adj}(A) = \det A \, I_n$

Důkaz

$$(A \operatorname{Adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \operatorname{adj}(A)_{kj} =$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{ik} (-1)^{k+j} \det(A^{jk})}_{\text{Laplaceův rozvoj!!}} = \begin{cases} \det(A) & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

$\boxtimes$

Důsledek $A \in T^{n \times n}$ regulární. Potom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Důsledek $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Potom A^{-1} má celočíselné hodnoty právě když $\det(A) = \pm 1$.

<u>Důkaz</u>.

$\Rightarrow$: $1 = \det(A)\det(A^{-1})$.

A, A^{-1} celočíselné $\Rightarrow \det(A), \det(A^{-1})$ celočíselné $\Rightarrow$ nutně rovny 1.

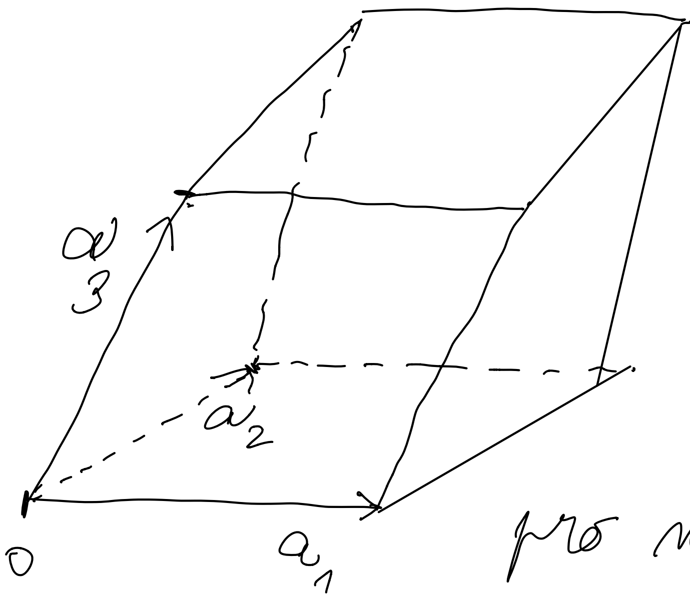
$\Leftarrow$: $A^{-1}_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A^{ji})$ což je za našich předpokladů celé číslo. $\boxtimes$

Geometrická interpretace Det

nezkouší se

Rovnoběžnostěn s lineárně nezávislými hranami $a_1, \dots, a_n$ je

$\{ x \in \mathbb{R}^n ; x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i , 0 \le \alpha_i \le 1 \}$



Věta $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Objem rovnoběžnostěnu daného řádky A ["žije" v $\mathbb{R}^m$] je $\sqrt{\det(AA^T)}$. Tudíž pro $m = n$ je objem $|\det A|$.

Hezké geometrické souvislosti znaménka determinantu.

Determinant v teorii grafů

nezkouší se

1. Počet koster libovolného grafu je determinant (Matrix-Tree theorem)

---

2. Počet perfektních párování v bipartitních rovinných grafech je determinant.

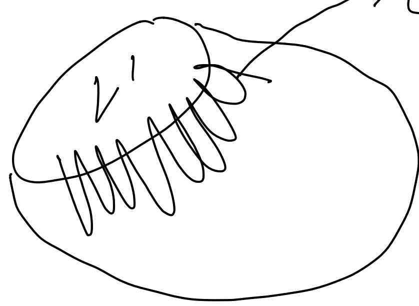
Toto je základ:

(a) Holographic algorithms (Valiant)

(b) Jeden z pilířů teoretické fyziky
[Feynman, Fisher, Kasteleyn, Isingův model, dimer model]

(c) Statistika hranových řezů pro <u>rovinné grafy</u>:

$G=(V,E)$ graf



$E' = \{e \in E;\ |e \cap V'| = 1\}$ hranový řez

$w: E \to \mathbb{Z}$

Generující funkce řezů

$$\mathcal{C}(G,w,x) = \sum_{E' \text{ hranový řez}} x^{w(E')} \qquad \Bigg\| \quad w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$$

dá se spočítat Gaussovou eliminací

Pro rovinné grafy je $\mathcal{C}(G,w,x)$ Pfaffian [něco jako determinant]