Obecná úloha lineárního programování

Úloha

Maximalizovat hodnotu $c^T x$ (tzv. účelová funkce)
za podmínek $Ax \leq b$ (tzv. omezující podmínky)
kde A je daná reálná matice typu $m \times n$ a $c \in R^n$, $b \in R^m$ jsou dané reálné vektory.

Řešení

- přípustné řešení: každé $x \in R^n$ splňující $Ax \leq b$
- optimální řešení: takové přípustné řešení x', že pro každé jiné přípustné řešení x platí: $c^T x \leq c^T x'$

Simplexová metoda

Rovnicový tvar

Maximalizovat hodnotu $c^T x$
za podmínek $Ax = b$ — afinní podprostor
a $x \geq 0$ — kladný ortant

Značení

Pro $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ značíme:

- $A_B =$ matice tvořená sloupci A, jejichž indexy jsou v B
- $x_B =$ vektor tvořený složkami x, jejichž ...
- $c_B =$ vektor tvořený složkami c, jejichž ...

Příklad

Příklad

Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = (3, 5, 7, 9, 11)^T$$

a $B = \{2, 4\}$ máme

$$A_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad x_B = (5, 9)^T$$

Předpoklady

- Matice A má lineárně nezávislé řádky — umíme zajistit
- Soustava $Ax = b$ má alespoň jedno řešení — jinak není co řešit

Báze úlohy LP v rovnicovém tvaru

Pro úlohu $\max c^T x$ za podmínek $Ax = b,\ x \geq 0$

Báze

- Báze - podmnožina $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ t.ž. matice je A_B regulární
- Přípustná báze - taková báze, že $A_B x_B = b$ má nezáporné řešení

Bázické řešení

Vektor $x \in R^n$ takový, že

- Bázické řešení - vektor x, pro který existuje báze B taková, že $A_B x_B = b$ a zároveň $x_j = 0$ pro každé $j \in \{1, 2, \ldots m\} - B$ (pozor: x nemusí být *přípustné* řešení)
- Bázické přípustné řešení - bázické řešení, které je přípustné

Příklad

Příklad

Pro úlohu $Ax = b$, $x \geq 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

je $B = \{2, 4\}$ přípustná báze:

Matice $A_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ je regulární a $A_B x_B = b$ má nezáporné řešení, totiž $x_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dále $x = (0, 2, 0, 1, 0)^T$ je bázické přípustné řešení.

Proměnné

Pro bázi B nazveme proměnné x_j

- bázické, pokud $j \in B$
- nebázické (volné), pokud $j \notin B$

Lemma

Lemma

Přípustné řešení x je bázické, právě když sloupce matice A odpovídající kladným proměnným jsou lineárně nezávislé.

Dukaz:

Pro dané x označme $K = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} | x_j > 0\}$.
$\Rightarrow$ jasné z definice
$\Leftarrow$ je-li $|K| = m$, pak A_B je čtvercová regulární; vezmi bázi $B = K$
je-li $|K| < m$ vezmi bázi B tvořenou indexy z K a dalšími $m - |K|$ indexy tak (s pomocí Steinitzovy věty), aby odpovídající sloupce A_B byly lin. nez. (protože sloupce A tvoří bázi R^m, je to možné).

Lemma

Lemma

Pro každou m-prvkovou $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, pro kterou je A_B regulární, existuje nejvýše jedno přípustné bázické řešení, tj. řešení x takové, že $x_j = 0$ pro $j \notin B$.

Poznámka: tj. báze jednoznačně určuje bázické řešení, ne nutně naopak.

Dukaz:

Pro přípustné bázické řešení x, k bázi B, platí $Ax = b$, tj.

$$A_B x_B + A_N x_N = b \;\text{ kde } N = \{1, 2, \ldots, n\} - B \;\text{ a } x_N = 0$$

Dostáváme $A_B x_B = b$, kde A_B je dle předpokladu regulární $\Rightarrow$ x_B určeno jednoznačně (a tudíž i celé x)

Věta

Věta

i) Má-li úloha LP v rovnicovém tvaru aspoň jedno přípustné řešení a zároveň je účelová funkce na množině přípustných řešení shora omezená, pak existuje i optimální řešení.
ii) Má-li úloha optimální řešení, pak i některé z přípustných bázických řešení je optimální.

Poznámka: bázických řešení je konečně mnoho!

Bez dukazu (prozatím?)

Simplexová metoda - příklad

Úloha

max $x_1 + x_2$ za podmínek

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 1 \\
x_1 & & & +x_4 & & = 3 \\
 & x_2 & & & +x_5 & = 2
\end{array}
$$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$

Najdeme nějaké přípustné bázické řešení, např. $x = (0,0,1,3,2)^T$ pro bázi $B = \{3,4,5\}$, a vytvoříme tzv. simplexovou tabulku.

Simplexová tabulka 1

$$
\begin{array}{rl|lll}
x_3 & = & 1 & +x_1 & -x_2 \\
x_4 & = & 3 & -x_1 & \\
x_5 & = & 2 & & -x_2 \\
\hline
z & = & & x_1 & +x_2 \ (= 0)
\end{array}
$$

vezmi puvodní omezující podmínky a vyjádři bázické proměnné pomocí nebázických

poslední řádek - účelová funkce vyjádřená též pomocí nebázických proměnných

Simplexová metoda - pokrač. 2

Naše snaha - zvětšovat hodnotu účelové funkce zvětšením jedné volné proměnné, např. x_2. Říkáme, že x_2 vstoupí do báze.

Simplexová tabulka 1

$x_3 =$	1	$+x_1$	$-x_2$	pro $x_3 \geq 0$ a $x_1 = 0$ vynucuje $x_2 \leq 1$
$x_4 =$	3	$-x_1$		neomezuje x_2
$x_5 =$	2		$-x_2$	pro $x_5 \geq 0$ a $x_1 = 0$ vynucuje $x_2 \leq 2$
$z =$		x_1	$+x_2$ $(= 0)$	

Nejpřísnější je omezení plynoucí z první rovnice $\Rightarrow$ položíme $x_2 = 1$. Ponecháme $x_1 = 0$. Dostaneme nové řešení $x = (0, 1, 0, 3, 1)^T$, odpovídající nové bázi $B = \{2, 4, 5\}$.

Simplexová tabulka 2

$x_2 =$	1	$+x_1$	$-x_3$	x_2 vstoupila do báze místo x_3
$x_4 =$	3	$-x_1$		
$x_5 =$	1	$-x_1$	$+x_3$	za x_2 dosaď dle prvního řádku
$z =$	1	$+2x_1$	$-x_3$ $(= 1)$	

Simplexová metoda - pokrač. 3

Opět chceme zvětšit z zvětšením volné proměnné - možno jedině pomocí x_1

Simplexová tabulka 2

$x_2 =$	1	$+x_1$	$-x_3$		zvětšování x_1 neomezuje
$x_4 =$	3	$-x_1$			vynucuje $x_1 \leq 3$
$x_5 =$	1	$-x_1$	$+x_3$		vynucuje $x_1 \leq 1$ - nejpřísnější
$z =$	1	$+2x_1$	$-x_3$	$(= 1)$	

Položíme $x_1 = 1$ a dostaneme nové bázické řešení $x = (1, 2, 0, 2, 0)^T$ pro bázi $B = \{1, 2, 4\}$, nová tabulka:

Simplexová tabulka 3

$x_1 =$	1	$+x_3$	$-x_5$		vstoupila do báze místo x_5
$x_2 =$	2		$-x_5$		dosaď za x_1
$x_4 =$	2	$-x_3$	$+x_5$		dosaď za x_1
$z =$	3	$+x_3$	$-2x_5$	$(= 3)$	

Simplexová metoda - pokrač. 4

Zvětšujeme pomocí x_3

Simplexová tabulka 3

$$\begin{array}{rl|llll}
x_1 & = & 1 & +x_3 & -x_5 & \text{zvětšování } x_3 \text{ neomezuje} \\
x_2 & = & 2 & & -x_5 & \text{zvětšování } x_3 \text{ neomezuje} \\
x_4 & = & 2 & -x_3 & +x_5 & \text{vynucuje } x_3 \leq 2 \\
\hline
z & = & 3 & +x_3 & -2x_5 & (= 3)
\end{array}$$

Položíme $x_3 = 2$ a dostaneme nové bázické řešení $x = (3, 2, 2, 0, 0)^T$ pro bázi $B = \{1, 2, 3\}$, nová tabulka:

Simplexová tabulka 4

$$\begin{array}{rl|llll}
x_1 & = & 3 & -x_4 & & \\
x_2 & = & 2 & & -x_5 & \\
x_3 & = & 2 & -x_4 & +x_5 & \\
\hline
z & = & 5 & -x_4 & -x_5 & (= 5) \quad \text{Máme optimální řešení}
\end{array}$$