

Příklad 1. Sestrojte duální programy pro následující lineární programy:

a)

$$\begin{array}{l} \text{Maximalizovat} \\ \text{za podmíněk} \end{array} \begin{array}{r} x_1 + x_2 \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 7x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} \text{Maximalizovat} \\ \text{za podmíněk} \end{array} \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

c) Minimalizovat $(10 \quad -4 \quad 0 \quad 0)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ za podmíněk

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,6 & 4 \\ 1 & -1 & 0,6 & 10 \\ 1 & -1 & -0,4 & -1 \\ 1 & -1 & -0,4 & -2 \\ 1 & 0 & 3,6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 43 \\ 27 \\ 25 \\ 22 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

d)

$$\begin{array}{l} \text{Minimalizovat} \\ \text{za podmíněk} \end{array} \begin{array}{r} c^T x \\ Ax \geq b \\ x \in (\mathbb{R}_0^+)^n, \end{array}$$

$$\text{kde } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \text{ a } c \in \mathbb{R}^n.$$

Příklad 2. Dualita nám umožňuje vyřešit úlohu lineárního programování “haluzí”. Dokážete uhádnout řešení primárního a duálního problému z Příkladu 1.b a dokázat, že obě jsou optimální?

Příklad 3. Primární úloha lineárního programování může mít optimum, nemít přípustný bod, nebo být neomezená. Podobně její duální úloha. Které z těchto devíti kombinací mohou nastat? Pro každou kombinaci ukažte příklad nebo dokažte, že nemůže nastat.

Příklad 4 (Dominující množina a její dualita). Sestavte celočíselný lineární program na nalezení minimální dominující množiny v grafu $G = (V, E)$. Nalezněte duální úlohu k relaxované úloze dominující množiny. Množina $M \subseteq V$ je dominující, jestliže každý vrchol $v \in V$ leží v množině M nebo v má souseda v množině M .

Příklad 5. Najděte optimální řešení primárního programu 1.c (s maximalizací místo minimalizace), pokud víte, že optimální řešení příslušného duálu je

$$y_1 = 3, 36, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 6, 48, y_5 = 0, 16$$

.

Příklad 6. Nalezněte duální úlohy k následujícím dvou úlohám LP.

$$\begin{array}{rcll}
 1) \text{ maximalizovat} & x_1 & - & 2x_2 & & + & 3x_4 & & \\
 2) \text{ minimalizovat} & x_1 & - & 2x_2 & & + & 3x_4 & & \\
 \text{za podmíněk} & & & & x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & & & & = & 0 \\
 & 6x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & & \geq & 5 \\
 & x_2 & \leq & 0, & x_4 & \geq & 0 & & & &
 \end{array}$$