Příklad 1. Najděte všechny grafy, které neobsahují cestu délky dva jako (indukovaný) podgraf.

Příklad 2. Ukažte, že každý strom T má alespoň $\Delta(T)$ listů. Jak musí T vypadat, aby měl právě $\Delta(T)$ listů?

Příklad 3. Ukažte, že každý graf je možné nakreslit jedním tahem tak, že každou jeho hranou projdeme právě dvakrát.

Příklad 4. Buďte $G_1 = (V, E_1)$ a $G_2 = (V, E_2)$ grafy (na téže množině vrchulů). Dokažte, že $\chi((V, E_1 \cup E_2)) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2)$. Jak vypadají grafy (přiklady grafů) G_1, G_2, pro které se nabývá rovnosti?

Příklad 5. Nalezněte graf a jeho dvě (různá) nakreslení do roviny, která mají různé stěny.

Příklad 6. Určete minimální a maximální počet hran v grafu na n vrcholech s c komponentami souvislosti.

Příklad 7. Pro která m a n je graf $K_{m,n}$ Eulerovský?

Příklad 8. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti alespoň $\lceil n/2 \rceil$.

Příklad 9. Dokažte, že pro každé dva vrcholy (zakořeněného) stromu existuje právě jedna cesta, která je spojuje.

Příklad 10. Uvažme následující hru na zakořenéných stromech (lesích). Hra je pro dva hráče a začíná se stromem T a jeho kořenem r. Tahem každého z hráčů je výběr (libovolného) vrcholu v aktuálním lese a smazání cesty od tohoto vrcholu směrem ke kořeni stromu, ve kterém se tento vrchol nachází. Při tomto se strom rozpadne na les, každý ze stromů tohoto lesa zakořeníme ve vrcholu, který bezprostředně sousedí s nějakým vrcholem na odebírané cestě. Existuje pro jednoho z hráčů vyhrávající strategie?

Příklad 11. Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý. Může tvrzení platit i obráceně?

Příklad 12. Pro která n existuje bipartitní graf na n vrcholech takový, že i jeho doplněk je bipartitní?

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

Úkol 1 (3 body)**.** Buď G graf takový, že $\chi(G - \{u, v\}) = \chi(G) - 2$ pro každé dva různé vrcholy $u, v \in V(G)$. Dokažte, že graf G je úplný graf.

Úkol 2 (6 bodů)**.** Označme S_n množinu všech celých čísel, která lze zapsat ve tvaru $1 \pm 2 \pm \cdots \pm n$ (kde každý ze symbolů $\pm$ nahradíme buď znaménkem $+$ nebo $-$ nezávisle na ostatních). Dokažte následující tvrzení:

1. $x \in S_n$, potom $-n(n+1)/2 \leq x \leq n(n+1)/2$.
2. Všechna čísla v množině S_n mají stejnou paritu – jsou buď lichá (nepárné) nebo sudé (párné). Jak parita souvisí s hodnotou n?
3. Všechna celá čísla splňující předchozí dvě podmínky v množině S_n leží.

Úkol 3 (3 body)**.** Na šachovnici $2^n \times 2^n$ jedno políčko chybí. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi tvaru „L“, která zabírají 3 políčka.

Úkol 4 (4 body)**.** Dokažte, že každý souvislý graf G na alespoň třech vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}, G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.