Příklad 1. Vinař má 3 lahve s různými odrůdami vína, na které nalepil etikety v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že právě/alespoň k lahví má správnou etiketu?

Příklad 2. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná permutace má právě jeden cyklus?

Příklad 3. Sousedům se narodily dvě děti a vy víte, že jedno z nich se jmenuje Pepíček. Jaká je pravděpodobnost, že i druhé z nich je kluk? (Předpokládejme, že každé dítě se narodí náhodně s pravděpodobností 1/2 jako kluk.)

Příklad 4 (Mincovní hody)**.** Pojďme hodit n-krát spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padlo právě k hlav? Jaká je pravděpodobnost, že je počet hlav sudý? Jaká by byla pravděpodobnost kdybychom měli minci ne až tak spravedlivou?

Příklad 5. Hoďme nezávisle dvakrát spravedlivou šesti-stěnou kostkou. Označme X_1 náhodnou proměnnou počtu ok padlý na první kostce, obdobně X_2 a položme $X = X_1 + X_2$ (tedy máme náhodnou proměnnou určující součet ok padlých na obou kostkách dohromady). Určete střední hodnotu $E[X_1|X = k]$.

Bayesova věta Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou disjunktní nezávislé jevy takové, že $\cup X_i = \Omega$. Potom

$$Pr[E_j|B] = \frac{Pr[E_j \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B|E_j]Pr[E_j]}{\sum_{i=1}^n Pr[B|E_i]Pr[E_i]}.$$

Příklad 6 (Bayesovo pozměnění)**.** Jak hledáme mezi třemi mincemi falešnou (hlava padne s pravděpodobností 2/3).

Příklad 7 (Co byste čekali od šatnářky?)**.** Ctihodní pánové v počtu n,... (to už známe a umíme!). Nechme ale přiřadit šatnářku dle její libosti a spočtěme si její očekávanou hodnotu (tj. kolik pánů při náhodné permutaci klobouků obdrží svůj klobouk).

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

Úkol 1 (6+ bodů). Hoďme nezávisle dvakrát spravedlivou šesti-stěnou kostkou. Označme X_1 náhodnou proměnnou počtu ok padlý na první kostce, obdobně X_2 a položme $X = X_1 + X_2$ (tedy máme náhodnou proměnnou určující součet ok padlých na obou kostkách dohromady).

1 bod Určete střední hodnotu $E[X|X_1$ je sudé$]$.

2 body Určete střední hodnotu $E[X|X_1 = X_2]$.

2 body Určete střední hodnoty $E[\max(X_1, X_2)]$ a $E[\min(X_1, X_2)]$.

1 bod Ukažte, že $E[\max(X_1, x_2)] + E[\min(X_1, X_2)] = E[X_1] + E[X_2]$.

(*) Určete střední hodnotu $E[X_1 - X_2|X = k]$, pro $2 \leq k \leq 12$.

Úkol 2 (5 bodů). Alenka a Bob se rozhodli (po dlouhé kryptografické výměně), že si pořídí děti a budou chtít nové a nové, dokud nebudou mít první děvče nebo $k \geq 1$ dětí celkem. Za předpokladu, že se děti rodí po jednom, jaký je očekávaný počet chlapců, které budou mít? Jaký je očekávaný počet chlapců v případě, že se Alenka s Bobem neomezí žádným celkovým počtem dětí (je-li to vůbec možné)?

Úkol 3 (3 body). Mějme v klobouku jeden bílý a jeden černý míček a uvažme následující náhodnou hru – vytáhneme z klobouku míček a dáme do klobouku dva míčky téže barvy. Hru hrajeme dokud v klobouku není n míčků. Ukažte, že počet bílých míčků je rovnoměrně rozdělen – tedy že je to každé z čísel $1, \ldots, n-1$ se stejnou pravděpodobností.

Úkol 4 (4 body). Mějme ve hře troje dveře – za jedněmi z nich je auto a za zbylými je kozel. Hráč si vybere dveře (chce ty za kterými je auto!) a na to se jedny ze zbývajících dveří za kterými je kozel otevřou. Na to je soutěžící dotázán, zda si chce ponechat výhru za dveřmi, které určil na začátku anebo raději změní svou volbu na ty druhé neotevřené dveře. Poraďte bezradnému soutěžícímu, za kterými dveřmi na něho čeká výhra s větší pravděpodobností.