Příklad 1 (Indukční opakování)**.** Ukažte (indukcí), že pro funkce $f(x) := 5x + 3$ a $g(x) = 5(x - 2)$ platí, že $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{N}$.

Příklad 2. Pan profesor zjistil, že stejné konference se účastní pět jeho přátel. Z těchto pěti lidí potká během konferenčních večeří každého jednotlivce desetkrát, každou dvojici pětkrát, každou trojici třikrát, každou čtveřici dvakrát a celou pětici jednou. Kolik dní trvala konference?

Příklad 3. Hostitel pořádá po sedm večerů večeři pro sedm svých přátel. Na každou večeři však pozve jen tři z nich. Kolika způsoby může hostitel přátele pozvat tak, že se během týdne všichni vystřídají?

Příklad 4. Kolik je cest na šachovnici $n \times n$, které neprotínají diagonálu?

O šatnářce Připomeňme, že $\check{s}(n)$ je funkce udávající počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ bez pevného bodu.

Příklad 5. Určete počet permutací s právě jedním pevným bodem.

Příklad 6. Dokažte vztah

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

A rekurentní vztah

$$\check{s}(n) = (n-1)[\check{s}(n-1) + \check{s}(n-2)].$$

Příklad 7. Kolik je permutací množiny $[n]$, které mají jen cykly délky 2?

Příklad 8. Pojďme si zahrát jednu (celkem nebezpečnou) hru pro $n \in \mathbb{N}$ lidí. Postavme všechny do kruhu a určeme prvního. Tento první dostane dýku a pomocí této dýky zabije svého kolegu stojícího po směru (imaginárních) hodinových ručiček (pro daný hruh jako hodinky). Poté podá dýku ve směru hodinových ručiček (tedy ne tomu mrtvému, ale jeho sousedovi, který přežil). Každý kdo má dýku opakuje stejnou akci jaká byla popsána výše. Na konci zbyde jeden člověk, který řekněme vyhrál. Uměli byste určit kam si máte stoupnout mezi $n - 1$ lidí, abyste přežili?

Pokyny k vypracování úkolů

Pořádně si přečtěte zadání (a pak ještě jednou to z webu – častokrát opravené). Pokud vám cokoli nedává smysl nebo nevychází jak by mělo, ozvěte se (může se jednat o překlep v zadání)!
Své řešení sepisujte **čitelně, komentovaně, úhledně a v ideálním případě i správně**. Rozhodně neopisujte cizí řešení (nic se tím nenaučíte). Řešení kolektivů je ale zcela v pořádku (pokud si jej následně každý sepíše sám) a je zcela podporováno. Pokud používáte znalosti ze cvičení či přednášky, odkažte se na příslušný zdroj.

Úkol 1 (4 body)**.** Automat (například si představte automat na kávu) přijímá korunové nebo dvoukorunové mince. V automatu je na začatku 0 korunových mincí. Pokud zákazník vhodí dvoukorunovou minci, automat se mu *pokusí* vrátit, pokud to není možné, automat se zasekne. Kolika způsoby je možné seřadit m zákazníků s korunovou mincí a n zákazníků s dvoukorunovou mincí tak, aby se automat nezasekl, když jej zákazníci navštíví v tomto pořadí?

Úkol 2 (4 body)**.** Kolik existuje permutací π množiny $[n]$, které nejsou involuce? Involuce je permutace, která je sama sobě inverzí, tj. $\pi \circ \pi = id$.

Úkol 3 (3 body)**.** Postavme $2n$ lidí do kruhu. Kolika způsoby si může n dvojic zároveň podávat ruce tak, aby se nedostali do neslušné situace – tedy aby se žádným dvěma dvojicím nestalo to, že by se křížily jejich ruce.

Úkol 4 (6 bodů)**.** Sečtěte následující řady:

1. $\sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i}^2$,
2. $\sum_{0 < i \leq n} \binom{n}{i} i^3$.