Příklad 1. Nalezněte potenční množinu množin $X = \{i \in \mathbb{N} \colon i \leq 20, i \equiv 1 \mod 5\}$ a $Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Příklad 2. Jaká je kardinalita (velikost) potenční množiny M v závislosti na kardinalitě množiny M samotné.

Příklad 3. Je pravdivé tvrzení, že pro každé dvě množiny X a Y platí $X = Y$, právě když se rovnají jejich potenční množiny? Pokud and, dokažte to, v opačném případě nalezněte protipříklad.

Definice 1. Řekneme, že relace $R \subseteq M \times M$ na (konečné) množině M je

reflexivní, pokud pro každé $m \in M$ platí, že $(m, m) \in R$,

symetrická, pokud pro každé $(x, y) \in R$ platí také, že $(y, x) \in R$,

(slabě) anti-symetrická, pokud $(x, y) \in R$ a zároveň $(y, x \in R)$, potom nutně platí $x = y$,

tranzitivní, pokud kdykoli $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$, potom nutně také $(x, z) \in R$.

Příklad 4. Nalezněte relaci (je-li to možné), která

1. je anti-symetrická i symetrická zároveň
2. je anti-symetrická a není symetrická
3. není anti-symetrická, ale je symetrická
4. neni ani anti-symetrická, ani symetrická

Příklad 5. Mějme dvě relace R a S na téže množině. Rozhodněte zda jsou relace $R \cup S$, $R \cap S$, $R \Delta S$, $R \setminus S$, $R \circ S$ a R^{-1} stejného typu jako relace R a S, jsou-li R i S

1. reflexivní,
2. symetrické,
3. anti-symetrické,
4. tranzitivní.

Nezapomeňte si u každého dobře rozmyslet důvod vašeho tvrzení (tedy buď důkaz nebo protipříklad).

Příklad 6 (Skládání relací nekomutuje?)**.** Nalezněte (konečnou) množinu M a relace R a S na této množině (pokud možno se vyhněte funkcím) takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Definice 2. Definujme induktívně skládání relací na množině takto $R^1 = R$ a $R^{n+1} = R^n \circ R$ pro $n > 1$ a libovolnou relaci R na nějaké množině.

Příklad 7 (DCV 1 — 5 bodů)**.** Ukažte, že pro každou relaci R na konečné množině platí, že existují $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $R^m = R^n$. Lze toto tvrzení dokázat i bez „omezení“ na konečnou nosnou množinu (zobecnit)?

Příklad 8 (DCV 2 — 5 bodů)**.** Ukažte, že pro (ideálně co nejmenší) konečnou množinu M existuje relace R na M taková, že pro libovolné $n \leq 1$ je $R^n \neq R^{n+1}$.

Příklad 9 (BONUS za čestné uznání)**.** Dokažte nebo vyvraťte tvrzeníčko. Buď R anti-symetrická relace na množně, potom každá její podrelace $\bar{R} \subseteq R$ je také anti-symetrická.