Complementary slackness conditions – buďte x a y přípustná řešení primárního resp. duálního programu. Pak x a y jsou optimální, pokud platí:

- $x_j > 0 \iff$ j-té omezení v duálním programu je splněno s rovností,
- $y_i > 0 \iff$ i-té omezení v primárním programu je splněno s rovností.

Příklad 1. Mějme následující program:

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizuj} & x_1 - 5x_2 \\ \text{pro} & x_1, x_2 \geq 0 \\ \text{za podmínek} & \begin{array}{rcr} -x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 40 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 20 \end{array} \end{array}$$

Prokažte, že (4,9) je optimální řešení. Dále nahlédněte, kterou z hodnot na pravé straně by bylo nejlepší změnit (a jak), aby hodnota cílové funkce klesla.

Příklad 2.

$$\begin{array}{rl} \text{maximalizuj} & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ \text{pro} & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ \text{za podmínek} & \begin{array}{lcr} x_1 + x_2 - 2x_3 & \leq & -1 \\ -x_2 - 2x_3 & \leq & -1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 & \leq & -2 \end{array} \end{array}$$

Je vektor (1,0,1) optimálním řešením?

Definice 1. Matice A typu $n \times m$ je totálně unimodulární, pokud determinant každé její submatice typu $k \times k$ roven -1, 0 nebo 1 pro všechna $1 \leq k \leq \min\{n, m\}$.
Matice A typu $n \times m$ je unimodulární, pokud je plné řádkové hodnosti, celočíselná a determinant každé její submatice typu $n \times n$ roven -1, 0 nebo 1.

Příklad 3. Matice A je totálně unimodulární právě tehdy, když matice $(A|I)$ je unimodulární.

Příklad 4. Dokažte, že matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní.

Příklad 5. Buď A totálně unimodulární matice plné řádkové hodnosti tvaru $m \times n$ a B báze matice A (tj. čtvercová regulární podmatice matice A tvaru $m \times m$). Ukažte, že $B^{-1}A$ je totálně unimodulární.

Příklad 6. Z přednášky je dokázáno, že matice A je unimodulární právě tehdy, když polyedr $\{x;\ Ax = b, x \geq 0\}$ je celočíselný pro všechny celočíselné vektory b. Dokažte větu Hoffman-Kruskal.

Domácí úkoly - termín odevzdání 17.05.2012

Domácí úkol 1 (8 bodů)**.**

(a) Nalezněte celočíselny mnohostěn $\{x;\ Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A a b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?
Pro Vámi nalezenou matici A najděte jiný vektor b takový, že mnohostěn nebude celočíselný.

(b) Dokažte, že $\{x;\ Ax \leq b\}$ je celočíselný pro všechny celočíselné vektory b, jestliže A je totálně unimodulární. Platí obecně i opačná implikace?

K následujícím úlohám Pro násedující úlohy využijte libovolný řešič na lineární programování. Vaše řešení by mělo obsahovat model LP, jeho realizaci ve vámi zvoleném řešiči (popřípadě další úpravy), popis řešení a cokoli dalšího, co sami uznáte za vhodné.

Domácí úkol 2 (8 bodů)**.** Formulujte lineární program pro nalezení nejkratší Hamiltonské kružnice pro úplný graf, jehož vrcholy jsou všechny body v $\mathbb{R}^2$ tvaru $[k+l, m+n]$, kde číslice

$$k, l, m, n \in \{a | a \text{ se vyskytuje ve vašem čísle osoby na UK}\}.$$

Jako metriku použijte euklidovskou vzdálenost bodů v $\mathbb{R}^2$.

Domácí úkol 3 (4 body)**.** Formulujte lineární program pro problém největší možné koule uvnitř polyedru v $\mathbb{R}^3$ zadaného omezeními $x + y \leq 9, -x + y \leq -3, x - y \leq 9, x + y \geq 3, x + z \leq 7, -x + z \leq 1, x - z \leq 7, x + z \geq -1$.