Příklad 1 (Mentální rozcvička)**.** Ukažte, že $\mathbb{Z}$ netvoří těleso.

Příklad 2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ zapište vektor $(-7, 12, 2, -4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(-5, 5, 1, -1)^T$, $(2, -5, 0, 2)^T$, $(3, 2, 0, -2)^T$ a $(2, -3, 1, 1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Příklad 3. Dokažte, že pro každou množinu vektorů M platí $L(L(M)) = L(M)$.

Příklad 4. Dokažte, že následujíci tvrzení o vektorech $u_1, \dots u_k$ jsou ekvivalentní:

a) Neexistuje netriviální kombinace vektorů $u_1, \dots u_k$ dávající $\mathbf{0}$.

b) Žádný z vektorů $u_1, \dots, u_k$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci zbylých vektorů (rovnice $u_1 = a_2u_2 + \dots + a_ku_k$ a podobné nemá řešení).

c) $\forall v \in L(u_1, \dots, u_k)$ existuje právě jedna lineární kombinace vektorů $u_1, \dots u_k$, která dává v.

Příklad 5. Buďte $u_1, \dots u_k$ lineárně nezávislé a $u \in L(u_1, \dots, u_{k-1})$, potom i $u_1, \dots, u_{k-1}, u_k + u$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad 6. Ukažte, že množina $\{(1, -1, 2, -3), (1, 1, 2, 0), (3, -1, 6, -6)\}$ nemá stejný lineární obal jako množina $\{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 3)\}$. Jako vektorový prostor uvažte $\mathbb{R}^4$.

Příklad 7. Mějme $a, b, c \in \mathbb{R}$ dané. Jaká volba d způsobí, že následující matice bude mít rank 1?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Příklad 8 (Zpět k ranku)**.** Nechť $A,\ B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ je matice.

- Jaký je vztah mezi $rank(A)$ a $rank(-A)$?
- Jaký je vztah mezi $rank(A)$ a $rank(kA)$, pro $k \in \mathbb{F}$?
- Je nějaký vztah mezi $rank(A)$, $rank(B)$ a $rank(A + B)$?

Příklad 9. Nalezněte báze vektorových prostorů (ověřte, že se jedná o vektorové prostory) a určete jejich dimenzi:

- Polynomů stupně nejvýš 3 nad $\mathbb{R}$, které mají jako kořen 7 - tedy $(\forall p)(p(7) = 0)$.
- Polynomů stupně nejvýš 3 nad $\mathbb{R}$, pro které platí $(\forall p)(p(7) = 0 \& p(5) = 0)$.
- Polynomů stupně nejvýš 3 nad $\mathbb{R}$, pro které platí $(\forall p)(p(7) = 0 \& p(5) = 0 \& p(3) = 0)$.
- Polynomů stupně nejvýš 3 nad $\mathbb{R}$, pro které platí $(\forall p)(p(7) = 0 \& p(5) = 0 \& p(3) = 0) \& p(1) = 1)$.