**Řešení domácí písemky**

**Příklad 1.** Nechť $K(s,r)$ označuje kladně orientovanou kružnici se středem v bodě $s$ a poloměrem $r$. Spočítejte následující integrály.

(a) $\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz$ kde $\gamma = K(i,1)$.

(b) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^3}\,dz$ kde $\gamma = K(0,1)$.

(c) $\int_\gamma \Re(z)\Im(z)\,dz$, kde $\gamma = K(0,1)$. ($\Re(z)$ a $\Im(z)$ označují reálnou a imaginární část $z$.)

**Řešení 1a.** Integrovaná funkce je holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ a dá se rozložit na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{\alpha}{z+i} + \frac{\beta}{(z+i)^2} + \frac{\gamma}{z-i} + \frac{\delta}{(z-i)^2},$$

pro vhodné komplexní koeficienty $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Pro zjištění hodnot těchto koeficientů předchozí rovnost upravíme do tvaru

$$1 = \alpha(z-i)^2(z+i) + \beta(z-i)^2 + \gamma(z+i)^2(z-i) + \delta(z+i)^2. \tag{1}$$

Do této rovnice můžeme například dosadit $z=i$ a $z=-i$, čímž získáme $\delta=-1/4$ a $\beta=-1/4$. Dosazením $z=0$ získáme vztah

$$1 = -i\alpha + 1/4 + i\gamma + 1/4.$$

a porovnáním koeficientů u $z^3$ na obou stranách rovnice (1) dostaneme

$$0 = \alpha + \gamma.$$

Odtud plyne $\gamma = -i/4$ a $\alpha = i/4$. Takže máme

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_\gamma \frac{i}{4(z+i)}\,dz + \int_\gamma -\frac{1}{4(z+i)^2}\,dz + \int_\gamma -\frac{i}{4(z-i)}\,dz + \int_\gamma -\frac{1}{4(z-i)^2}\,dz.$$

První dva integrály na pravé straně jsou nulové, protože integrovaná funkce je holomorfní na na vnitřku $\gamma$ i na okolí $\gamma$. Čtvrtý integrál je také nulový, což je vidět třeba z toho, že integrovaná funkce má primitivní funkci $\frac{1}{4(z-i)}$ na $\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Zbývá tedy třetí integrál, jehož hodnota je $2\pi i(-i/4) = \pi/2$ díky Cauchyho vzorci. Takže máme

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

*Poznámka: všimněte si, že koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tvoří komplexně sdružené dvojice $\alpha = \overline{\gamma}$ a $\beta = \overline{\delta}$. To platí u racionální funkce s reálnými koeficienty obecně: nereálné kořeny jmenovatele takové funkce tvoří komplexně sdružené dvojice, a odpovídající koeficienty u těchto kořenů v rozkladu na parciální zlomky také tvoří komplexně sdružené dvojice.*

**Alternativní řešení 1a.** Pokud známe obecnou verzi Cauchyho vzorce, tak příklad 1a lze vyřešit bez rozkladu na parciální zlomky. Označme $g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$. Potom máme

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2}\,dz,$$

kde funkce $g(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, tj speciálně je holomorfní na okolí $\gamma$ a na vnitřku $\gamma$. Z obecné verze Cauchyho vzorce víme, že tento integrál pak lze spočítat pomocí vztahu

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2} = 2\pi i g'(i),$$

kde $g'(z) = -\frac{2}{(z+i)^3}$ je derivace $g(z)$. Dosazením do tohoto vztahu získáme opět výsledek $\pi/2$.

*Poznámka: obecný Cauchyho vzorec říká, že*

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi i \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!},$$

*kde $\gamma$ ju prostá uzavřená křivka, $z_0$ je komplexní číslo uvnitř $\gamma$, a $g$ je komplexní funkce, která je holomorfní uvnitř $\gamma$ a na okolí $\gamma$. Pokud tento vzorec neznáte, můžete ho snadno odvodit jako důsledek toho, že mocninné řady lze integrovat i derivovat "člen po členu" uvnitř jejich kruhu konvergence. Všimněte si, že když se $g(z)$ rozvine do mocninné řady $g(z) = \sum_{k\geq 0} a_k (z-z_0)^k$, tak koeficient $a_n$ je přesně roven $\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$ – to snadno nahlédnete, když mocninnou řadu $n$-krát zderivujete a dosadíte $z = z_0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\gamma$ leží celá uvnitř kruhu konvergence mocninné řady $\sum_{k\geq 0} a_k (z-z_0)^k$. Teď můžeme odvodit obecnou verzi Cauchyho vzorce:*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz &= \int_\gamma \frac{\sum_{k\geq 0} a_k (z-w)^k}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\
&= \sum_{k\geq 0} a_k \int_\gamma (z-z_0)^{k-n-1}\,dz && \textit{protože řady lze integrovat člen po členu} \\
&= a_n \int_\gamma (z-z_0)^{-1} && \textit{protože } \int_\gamma (z-z_0)^N = 0 \textit{ pro } N \neq -1. \\
&= 2\pi i a_n && \textit{podle `jednoduchého' Cauchyho vzorce} \\
&= 2\pi i \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}.
\end{aligned}$$

**Řešení 1b.** Funkce $\cos(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Pro výpočet integrálu $\int_\gamma \cos(z)/z^3\, dz$ můžeme buď použít rozvoj $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4)$ (stačí znát jen tyto první členy, další členy hodnotu integrálu neovlivní), nebo Cauchyho vzorec:

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^3}\, dz = 2\pi i \frac{\cos''(0)}{2!}.$$

V každém případě dostaneme výsledek $-\pi i$.

**Řešení 1c.** Integrovaná funkce není holomorfní, takže nelze použít Cauchyho vzorec ani Cauchyho větu. Budeme postupovat podle definice komplexního křivkového integrálu. Pro $\gamma$ zvolíme parametrizaci $z = e^{it}$.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \Re(z)\Im(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} \Re(e^{it})\Im(e^{it}) i e^{it}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t) i e^{it}\, dt \\
&= i\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t)\, dt - \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t)\, dt \\
&= i\int_1^{1} -u^2\, du - \int_0^{0} v^2\, dv \qquad \text{(substituce } u = \cos(t) \text{ a } v = \sin(t)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

*Poznámka: místo substituce se dá také použít integrování per partes. Jiná možnost je použít vztahy $\sin(t) = (e^{it} - e^{-it})/(2i)$ a $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$, čímž se $\int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t) i e^{it}\, dt$ převede na součet integrálů z exponenciálních funkcí, které vyjdou všechny nulové, protože $e^{it}$ je $2\pi$-periodická.*

**Příklad 2.** Pro každou z následujících rovností najděte všechna komplexní čísla $z$, která ji splňují.

(a) $z^5 = -1$.

(b) $e^z = \frac{i}{2}$.

(c) $\Re(\sin(z)) = 0$.

**Řešení 2a.** Pišme $z$ ve tvaru $re^{i\phi}$, kde $r = |z|$ a $\phi \in [0, 2\pi)$. Pak máme $z^5 = r^5 e^{5i\phi} = -1 = e^{i\pi}$. Odtud plyne, že $r = 1$ a $5\phi \equiv \pi \pmod{2\pi}$, což dává $z \in \{e^{i\pi/5}, e^{3i\pi/5}, e^{i\pi}, e^{7i\pi/5}, e^{9i\pi/5}\}$.

**Řešení 2b.** Pišme $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = \frac{i}{2} = \frac{1}{2} e^{i\pi/2} = e^{\ln(1/2)} e^{i\pi/2}.$$

Odtud plyne, že $a = \ln(1/2) = -\ln(2)$ a $b \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Řešením jsou tedy čísla $z$ patřící do množiny $\{-\ln(2) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

**Řešení 2c.** Pišme $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
0 &= \Re(\sin(z)) \\
&= \Re\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \\
&= \Re\left(\frac{e^{ia-b} - e^{-ia+b}}{2i}\right) \\
&= \Re\left(\frac{e^{-b}(\cos(a) + i\sin(a)) - e^{b}(\cos(-a) + i\sin(-a))}{2i}\right) \\
&= \sin(a)\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}.
\end{aligned}$$

Protože $e^b + e^{-b}$ je kladné pro každé $b \in \mathbb{R}$, je poslední rovnost splněna právě tehdy, když $\sin(a) = 0$, tj. když $a = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Řešením jsou tedy čísla $z$ patřící do množiny $\{k\pi + ib,\ k \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{R}\}$.

**Příklad 3.** Nechť $a$ je reálné číslo větší než 1. Spočítejte (reálný) integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(x)}\, dx.$$

Návod: použijte vztah $\cos(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$ a ukažte, že hledaný integrál je roven komplexnímu integrálu $\int_\gamma f$, kde $\gamma = K(0,1)$ a $f$ je vhodně zvolená komplexní funkce.

**Řešení 3.** Označme $I$ hledaný integrál. Pak máme

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(x)}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{2a + \exp(ix) + \exp(-ix)}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2i\exp(ix)}{2ai\exp(ix) + i\exp(2ix) + i}\, dx \\
&= \int_\gamma \frac{2}{2aiz + iz^2 + i}\, dz && \text{použili jsme parametrizaci } z = e^{ix} \\
&= \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 2az + 1}\, dz.
\end{aligned}$$

Zbývá spočítat křivkový integrál z racionální funkce $(z^2 + 2az + 1)^{-1}$. Na to použijeme standardní postup pomocí Cauchyho vzorce. Označme $\alpha = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ a $\beta = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ oba kořeny rovnice $z^2 + 2az + 1 = 0$. Nahlédneme, že $\alpha < -1$, takže $\alpha$ leží vně křivky $\gamma$ a funkce $\frac{1}{z-\alpha}$ je holomorfní na okolí a na vnitřku $\gamma$. Na druhou stranu, $\beta \in (-1, 0)$, což plyne například z toho, že $\alpha\beta = 1$, tudíž $\beta$ leží ve vnitřku $\gamma$. Nyní dokončíme předchozí výpočet dosazením do Cauchyho vzorce:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i} \int_\gamma \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \, dz \\ &= \frac{2}{i} \int_\gamma \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \, dz \\ &= \frac{2}{i} 2\pi i \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

**Příklad 4.** Spočítejte integrál

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \, dx.$$

Návod: označme $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$. Platí $I = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x) \, dx$. Spočítejte komplexní integrál $\int_\gamma f$, kde $\gamma$ je sjednocení intervalu $\gamma_1 = [-R, R]$ a půlkružnice $\gamma_2 = \{R \exp(it); \, t \in [0, \pi]\}$ (zde můžete využít příklad 1a). Ukažte, že když se $R$ blíží k $+\infty$, blíží se $\int_{\gamma_2} f$ k nule, a odvoďte z toho hodnotu $I$.

**Řešení 4.** Díky Cauchyho větě a díky výsledku příkladu 1a víme, že pro $R > 1$ platí

$$\frac{\pi}{2} = \int_\gamma f(z) \, dz = \int_{\gamma_1} f(z) \, dz + \int_{\gamma_2} f(z) \, dz,$$

z čehož plyne

$$I = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_1} f(z) \, dz = \frac{\pi}{2} - \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z) \, dz.$$

Chceme ukázat, že $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z) \, dz = 0$. K tomu použijeme následující jednoduchý odhad (platný pro libovolnou křivku $\gamma_2$ a libovolnou komplexní funkci $f$):

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) \, dz \right| \leq \text{délka}(\gamma_2) \cdot \sup_{z\in\gamma_2} |f(z)|.$$

V našem případě je délka $\gamma_2$ rovna $\pi R$ a platí

$$\sup_{z\in\gamma_2} |f(z)| = \frac{1}{\inf_{z\in\gamma_2} |(z^2 - 1)^2|} \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2}.$$

Odtud plyne

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \le \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi R}{(R^2-1)^2}=0,$$

a tudíž $I=\frac{\pi}{2}$.

*Poznámka: jiný způsob jak odhadnout* $|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz|$ *je převést tento integrál pomocí parametrizace* $z = Re^{it}$ *na běžný Riemannův integrál* $\int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it}\,dt$*, jehož absolutní hodnota se dá zjevně shora odhadnout výrazem* $\pi R\cdot\sup_{t\in[0,\pi]}|f(Re^{it})|$*. Tento postup dá stejný odhad jako výše uvedené řešení.*