Bodované domácí úkoly

Čísla v rámečku udávají bodové ohodnocení. Příklady ohodnocené jedním bodem jsou rutinní příklady, které svou obtížností zhruba odpovídají typickým příkladům ze zápočtové písemky. Příklady za dva body mohou být o něco pracnější, ale princip jejich řešení by měl být každému jasný. Nezapomeňte u každého řešení ověřit předpoklady vět, které používáte.

1. Spočítejte objem následujících množin
   - $\boxed{1}$ (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le z \le x,\ x^2 + y^2 \le 1\}$
   - $\boxed{2}$ (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 1,\ z \le xy\}$.
   - $\boxed{1}$ (c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x/a)^2 + (y/b)^2 \le R^2\}$, kde a, b a R jsou kladná reálná čísla. Ukažte, jak lze tento integrál pomocí substituce převést na výpočet obsahu kruhu.
   - $\boxed{1}$ (d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + z^2 \le 1\}$.
2. Spočítejte následující integrály.
   - $\boxed{1}$ (a) $\int_M e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina $0 \le y \le 1$ a $0 \le x \le y^2$
   - $\boxed{1}$ (b) $\int_M \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená množina ohraničená křivkami $xy = 1$, $y = x$ a $x = 2$.
   - $\boxed{1}$ (c) $\int_M z^2\, dx\, dy\, dz$, kde M je omezená množina ohraničená plochami $z = 0$ a $z = 4 - x^2 - y^2$.
   - $\boxed{1}$ (d) $\int_M \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \le ax\}$, přičemž $a > 0$ je libovolný parametr.
   - $\boxed{2}$ (e) $\int_M \frac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \le 2, ay \le x \le by\}$, přičemž $0 < a < b$ jsou libovolné parametry. (I když to není na první pohled zřejmé, zde mohou pomoci polární souřadnice.)

   Následující příklady jsou teoretičtěji zaměřené, případně vyžadují nějaký drobný nápad.

3. $\boxed{3}$ Spočítejte objem množiny $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le 1\}$.
4. $\boxed{3}$ Nechť $P \subseteq \mathbb{R}^2$ je omezená množina s nulovou hranicí, která má obsah roven jedné. Definujme množinu $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ následovně: $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le z \le 1, (x/z, y/z) \in P\}$. Předpokládejme, že Q má rovněž nulovou hranici. Spočítejte objem Q. Odvoďte analogický výsledek pro obecnou dimenzi (tj. pro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ a $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$).
5. $\boxed{3}$ Definujme množiny $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = x^2 + y^2\}$ a $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x - c)^2 + y^2 = 1\}$, kde c je libovolné reálné číslo. Ukažte, že všechny body z průniku $P \cap Q$ leží v jedné rovině. Označme tuto rovinu R. Spočítejte objem omezené oblasti ohraničené plochou P a rovinou R a ukažte, že tento objem nezávisí na volbě parametru c.