

Obsah cvičení 24. října 2011

- Spočítejte reálnou a imaginární část následujících čísel: $\frac{1}{i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{2}{1-5i}$
- Načrtněte, jak vypadají následující množiny v komplexní rovině:
 1. $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < 2\}$
 2. $\{z \in \mathbb{C}, |z - 1| < 1\}$
 3. $\{z \in \mathbb{C}, |\Re(z)| + |\Im(z)| \leq 1\}$
 4. $\{z \in \mathbb{C}, \Re(z(1+i)) \geq 1\}$
 5. $\{z \in \mathbb{C}, \Im(z^2) < 0\}$.
- O následujících komplexních funkcích rozhodněte, v kterých bodech mají derivaci:
 1. $f(z) = \Re(z)$
 2. $f(z) = \bar{z}$
 3. $f(z) = z^2$
- Definujme funkci $\exp(z)$ jako součet řady $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.
 1. Spočítejte poloměr konvergence této řady.
 2. Ukažte, že $\exp(0) = 1$ a že $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.
 3. Ukažte, že $\exp'(z) = \exp(z)$.
 4. Definujme funkce

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

a

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Ukažte, že pro každé komplexní z platí $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$.