První sada domácích úkolů

za každý správně vyřešený podpříklad získáte jeden bod

Příklad 1. Přepište slovní tvrzení do formulí s kvantifikátory. Pokud není uvedena doména, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

1. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
2. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
3. Existuje číslo, které je aspoň tak velké jako všechna čísla z množiny X.
4. Neexistuje číslo z množiny M, které je větší než všechna čísla z množiny S.
5. Pokud každé sudé číslo patří do množiny M, pak žádné sudé číslo nepatří do množiny N.
6. Pro každé číslo z množiny A a každé číslo z množiny B platí, že jejich součin je 16.
7. Pro žádné číslo z množiny C a žádné číslo z množiny D neplatí, že jejich součin je 7.
8. Existuje číslo, jehož každý dělitel je menší než 523.
9. Každé číslo x má nějakého dělitele, který není dělitelem žádného jiného čísla než x.
10. Pro každé číslo y existuje číslo z množiny K, které je větší než y a které není dělitelné žádným číslem z množiny L.

Příklad 2. Negujte.

1. $(D \wedge \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$
2. $(\neg B \wedge C) \wedge (\neg C \vee (A \Rightarrow B))$
3. $A \vee (\neg D \wedge \neg C) \vee \neg(X \wedge Y)$
4. $(\forall y \forall x\ \neg P(x, y)) \Rightarrow (\exists w\ (Z(w) \Rightarrow W(w)))$
5. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
6. Pokud je v každém kroužku aspoň jeden student, který chodí na přednášku z analýzy, pak v žádném kroužku není vic než pět studentů navštěvujících přednášku z algebry.
7. Každá množina pěti čísel obsahuje aspoň tři lichá čísla nebo aspoň tři sudá čísla.
8. V žádné z posledních pěti sezón fotbalové ligy se nestalo, že by některý klub vyhrál více než pět zápasů v řadě a přitom nezískal titul.

Příklad 3. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Své odpovědi zdůvodněte.

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ y \geq x$
2. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ y = x + 1$
3. $(\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ y = x + 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}\ x < 0)$
4. $\exists x \in \mathbb{N}\ \big((\forall y \in \mathbb{N}\ y = x + 1) \Rightarrow x^2 < 1\big)$
5. $\exists x \in \mathbb{N}\ \big(\forall y \in \mathbb{N}\ (y = x + 1 \Rightarrow x^2 < 1)\big)$
6. $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{Z}\ x + y + z = 56$
7. $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{Z}\ x + y + z = 56$

Příklad 4. K násedujícím implikacím zformulujte obměnu.

1. Jestliže $x > 105$, potom $x > 104$.
2. Jestliže chodím na přednášku z analýzy a chodím na přednášku z diskrétní matematiky, potom se přednáška z analýzy a přednáška z diskrétní matematiky nekonají ve stejný čas.
3. Pokud existuje liché prvočíslo, pak pro žádné $x \in \mathbb{N}$ neexistuje $y \in \mathbb{N}$ takové, že $y > x$.
4. Pokud x je dělitelné 6 a y je dělitelné 7, pak $x \cdot y$ je sudé.
5. $(\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y = x + 1) \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y = x + 1)$.
6. Pokud jsou všechny ovce bílé, jsou všechny kočky černé.
7. Pokud existuje fialová kráva, nejsou všechny krávy strakaté.