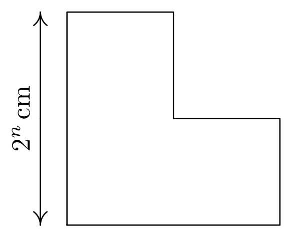
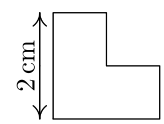
Příklady ze 14. 10. 2005

- Máme arch papíru, který ma tvar čtverce, z něhož byla odstřižena pravá horní čtvrtina (viz Obrázek 1). Původní čtverec měl hrany délky 2^n cm, pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že tento arch papíru lze rozstříhat na kousky, které mají stejný tvar jako původní arch, ale jejich delší hrany mají délku 2 cm (viz Obrázek 2).



Obr. 1



Obr. 2

- Dokažte, že každé přirozené číslo $n \geq 18$ lze vyjádřit ve tvaru $n = 4k + 7l$, kde k, l jsou nezáporná celá čísla.

Definice. Nechť R je relace na množině M, tj. $R \subseteq M \times M$. Relace R se nazývá

(a) *reflexivní*, pokud $\forall x \in M \ (x, x) \in R$.

(b) *symetrická*, pokud $\forall x, y \in M \ (x, y) \in R \implies (y, x) \in M$.

(c) *tranzitivní*, pokud $\forall x, y, z \in M \ (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$.

Relace, která je reflexivní, symetrická i tranzitivní se nazývá *ekvivalence*. Pokud R je ekvivalence na množině M a x je libovolný prvek M, potom množina $\{y \in M : (x, y) \in R\}$ se nazývá *třída ekvivalence R určená prvkem x*.

- O následujících relacích na množině $\mathbb{N}$ rozhodněte, jestli jsou to ekvivalence. Pokud se jedná o ekvivalence, popište jejich třídy.

  (a) $(x, y) \in R$, právě když $x - y = 7k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

  (b) $(x, y) \in R$, právě když $|x - y| \leq 10$.

  (c) $(x, y) \in R$, právě když $x - y = 7k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, nebo $x - y = 8l$ pro nějaké $l \in \mathbb{Z}$.

- O následujících relacích na množině $\mathbb{R}$ rozhodněte, jestli jsou to ekvivalence. Pokud se jedná o ekvivalence, popište jejich třídy.

  (a) $(x, y) \in R$, právě když $x - y \in \mathbb{N}_0$.

  (b) $(x, y) \in R$, právě když $x - y \in \mathbb{Q}$.

  (b) $(x, y) \in R$, právě když $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část čísla x, tj. $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$.