Čtvrtá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro pondělní cvičení)

Řešení odevzdejte nejpozději v neděli 8. ledna.

Příklad 1. Nechť $G = (V, E)$ je multigraf. Označme jeho vrcholy $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a hrany $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. *Matice incidence nad* $\mathbb{Z}_2$ multigrafu G je matice M s n řádky a m sloupci definovaná následovně:

- Pokud je hrana e_i smyčka, tak i-tý sloupec M obsahuje samé nuly.
- Pokud je e_i hrana spojující dva různé vrcholy v_j a v_k, tak i-tý sloupec M obsahuje jedničky v řádcích j a k a v ostatních řádcích má nuly.

Připomeňme, že hodnost multigrafu G je definována jako $n - k(G)$, kde $k(G)$ je počet komponent souvislosti G. Připomeňme také, že hodnost matice se v lineární algebře definuje jako dimenze vektorového prostoru generovaného sloupci té matice (nebo ekvivalentně dimenze prostoru generovaného řádky té matice). Dokažte, že hodnost G je rovna hodnosti matice M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. [2 body]

Příklad 2. Nechť G je souvislý rovinný multigraf s daným rovinným nakreslením. Označme G^* duální multigraf ke G. Připomeňme následující vlastnosti, které jsme nahlédli na cvičení: pokud e je hrana G a e^* označuje hranu G^* duální k e, tak platí, že e je smyčka, právě když e^* je most, a naopak, e je most, právě když e^* je smyčka. Navíc pokud e není most, pak $(G - e)^* = G^*/e^*$, a pokud e není smyčka, pak $(G/e)^* = G^* - e^*$.

a) Jaký je vztah mezi Tutteovým polynomem G a Tutteovým polynomem G^*? [2 body]
b) Dokažte, že G a G^* mají stejný počet koster. [1 bod]
c) Bonus: najděte explicitní bijekci mezi kostrami G a kostrami G^*. [0 bodů]

Příklad 3. Označme $a_{n,k}$ počet způsobů, jak lze číslo n vyjádřit jako součet k lichých kladných čísel. Dva součty pokládáme za různé i tehdy, když se liší jen pořadím sčítanců. Například $a_{7,3} = 6$, protože číslo 7 můžeme vyjádřit jako $5 + 1 + 1$, $1 + 5 + 1$, $1 + 1 + 5$, $3 + 3 + 1$, $3 + 1 + 3$ a $1 + 3 + 3$. Najděte vzoreček v uzavřeném tvaru (tj. bez použití nekonečných sum) pro mocninnou řadu $A(x, y) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} a_{n,k} x^n y^k$. [3 body]

Příklad 4. Mějme "šachovnici" se třemi řádky a třemi sloupci. Spočítejte, kolik existuje neizomorfních způsobů, jak obarvit devět políček této šachovnice pomocí n barev. Dvě obarvení jsou izomorfní, pokud lze jedno převést na druhé pomocí rotace nebo vodorovného, svislého či diagonálního překlopení. Neklademe žádná omezení na možné barvy políček, tj. například sousední políčka mohou být obarvena stejnou barvou. [2 body]

Příklad 5. Pro $m \in \mathbb{N}_0$ označme a_m počet tříd izomorfismu všech multigrafů bez smyček majících čtyři vrcholy a m hran. Například $a_3 = 6$, jak ukazuje obrázek šesti multigrafů se třemi hranami uvedený níže. Najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro mocninnou řadu $\sum_{m \geq 0} a_m x^m$. [3 body]