Třetí série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro úterní cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v pondělí 5. prosince.

Příklady za 0 bodů jsou bonusové příklady, které můžete vyřešit, budete-li chtít, ovšem jejich vyřešení nemá vliv na zisk zápočtu.

Hranovou barevnost grafu G značím $\chi_e(G)$ a maximální stupeň značím $\Delta(G)$.

Příklad 1. Nechť G je graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň 3, až na jeden vrchol stupně 2. Dokažte, že $\chi_e(G) = 4$. [3 body]

Příklad 2. Nechť G je 3-regulární vrcholově 2-souvislý rovinný graf s pevně daným rovinným nakreslením. Z věty o čtyřech barvách víme, že stěny G lze obarvit čtyřmi barvami tak, že každé dvě sousední stěny mají různé barvy. Odvoďte z toho, že G má hranovou barevnost 3. [2 body]

Bonus: dokažte naopak, bez použití věty o čtyřech barvách, že když G je 3-regulární vrcholově 2-souvislý rovinný graf s hranovou barevností 3, pak stěny G lze dobře obarvit čtyřmi barvami. [0 bodů]

Příklad 3. Dokažte následující dvě tvrzení:

a) Každý d-regulární bipartitní graf G má hranovou barevnost d. [2 body] *(Poznámka: mohou se vám zde hodit vaše znalosti Hallovy nebo Tutteovy věty.)*
b) Pro libovolný bipartitní graf G platí $\chi_e(G) = \Delta(G)$. [2 body]

V řešení části b) můžete využít tvrzení z části a), i kdybyste část a) neuměli vyřešit.

Příklad 4. Nechť G je chordální graf. Popište polynomiální algoritmus, který v grafu G najde největší nezávislou množinu. Smíte předpokládat, že součástí vstupu pro váš algoritmus je i PES grafu G. Nezapomeňte zdůvodnit, že váš algoritmus je korektní. [2 body]

Příklad 5. Nechť $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ je permutace čísel $1, 2, \ldots, n$, tj. posloupnost, v níž se každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ vyskytuje právě jednou. Nechť K je délka nejdelší klesající podposloupnosti v p. Dokažte, že p lze pokrýt pomocí K rostoucích podposloupností (jinými slovy, v p lze najít K rostoucích podposloupností takových, že každý prvek p patří do některé z nich). [2 body]