Druhá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro úterní cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v pondělí 14. listopadu.

Příklad 1. Nechť H je graf s vrcholy $v_1, v_2, \dots, v_k$ a nechť G je libovolný graf. Dokažte, že G obsahuje H jako minor, právě když G obsahuje k neprázdných souvislých navzájem disjunktních podgrafů $U_1, U_2, \dots, U_k$ takových, že pro každou hranu $\{v_i, v_j\}$ grafu H existuje v grafu G hrana spojující vrchol z U_i s vrcholem z U_j. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

Příklad 2. Nakreslete na torus úplný graf K_7. [1 bod]

Příklad 3. Ukažte, že každý d-degenerovaný graf má průměrný stupeň nejvýše $2d$. [2 body]

Příklad 4. Ukažte, že pro každou plochu existuje jen konečně mnoho neizomorfních 7-regulárních grafů, které lze na tuto plochu nakreslit [2 body]. Najděte všechny plochy Γ, pro které existuje nekonečně mnoho neizomorfních 6-regulárních grafů, které lze na Γ nakreslit [3 body].

Příklad 5. Pro potřeby tohoto příkladu předpokládejme, že dva izomorfní grafy jsou totožné. Formálněji řečeno, slovem 'graf' označujme celou třídu izomorfismu grafů.

Označme $G \preccurlyeq_m H$ relaci "G je minor H". Pro danou množinu grafů $\mathcal{F}$ označme $\mathrm{Forb}(\mathcal{F})$ množinu všech těch grafů, které neobsahují žádný graf z množiny $\mathcal{F}$ jako minor (takže například $\mathrm{Forb}(\{K_5, K_{3,3}\})$ je přesně množina rovinných grafů, dle Kuratowského–Wagnerovy věty).

Nechť $\mathcal{M}$ je libovolná množina grafů. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní [2 body]:

1) Množina $\mathcal{M}$ je *uzavřená vůči minorům*, tj. pro každý graf G patřící do $\mathcal{M}$ platí, že i každý minor G patří do $\mathcal{M}$.
2) Existuje množina grafů $\mathcal{F}$ (třeba i nekonečná) taková, že $\mathcal{M} = \mathrm{Forb}(\mathcal{F})$. (Takové množině $\mathcal{F}$ se obvykle říká *množina zakázaných minorů* pro $\mathcal{M}$.)