Domácí úkoly z diskrétní matematiky
1. série

- Řešení domácích úkolů můžete odevzdat buď mailem na adrese jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo na papíře na cvičení.
- Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit.
- Řešení odevzdejte do středy 26. 10.

Příklad 1. Určete, jaké inkluze, případně rovnosti, platí mezi následujícími dvojicemi množin. Pro platné inkluze najděte důkaz, pro neplatné ukažte nějaký protipříklad.

- $A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$ vs. $\bigcap_{i=1}^{n} \left(A \setminus B_i\right)$. [1 bod]
- $2^{A\cap B}$ vs. $2^A \cap 2^B$. [1 bod]

Příklad 2. Nechť x je reálné číslo takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé číslo. [2 body]

Příklad 3. Definujme posloupnost čísel $F_0, F_1, F_2, \ldots$ tak, že $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pro $n > 1$ platí $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (tato posloupnost je známá pod názvem *Fibonacciho čísla*). Dokažte následující tvrzení.

- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$. [1 bod]
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje přesně F_n způsobů, jak lze číslo n vyjádřit jako součet lichých přirozených čísel (zde dva součty pokládáme za různé i tehdy, když se liší jen pořadím sčítanců). Například pro $n = 5$ máme následujících pět způsobů, jak vyjádřit číslo 5 jako součet lichých čísel: $5 = 1+1+1+1+1$, $5 = 3+1+1$, $5 = 1+3+1$, $5 = 1+1+3$, a $5 = 5$, což odpovídá tomu, že $F_5 = 5$. [2 body]

Příklad 4. Kolik existuje funkcí $f\colon \{1,2,\ldots,10\} \to \{1,2,\ldots,20\}$ takových, že každé liché číslo se zobrazí na sudé číslo? [1 bod]

Příklad 5. Kolik existuje funkcí $f\colon \{1,2,\ldots,20\} \to \{1,2,\ldots,10\}$ takových, že na každé číslo z množiny $\{1,\ldots,10\}$ se zobrazí právě dvě různá čísla z množiny $\{1,2,\ldots,20\}$? [2 body]