Čtvrtá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro středeční cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději do konce ledna. Pokud byste si přáli vidět správná řešení některých příkladů, stavte se na konzultaci.

Příklad 1. Nechť $G = (V, E)$ je multigraf. Označme jeho vrcholy $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a hrany $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. *Matice incidence nad* $\mathbb{Z}_2$ multigrafu G je matice M s n řádky a m sloupci definovaná následovně:

- Pokud je hrana e_i smyčka, tak i-tý sloupec M obsahuje samé nuly.
- Pokud je e_i hrana spojující dva různé vrcholy v_j a v_k, tak i-tý sloupec M obsahuje jedničky v řádcích j a k a v ostatních řádcích má nuly.

Připomeňme, že hodnost G je definována jako $n - k(G)$, kde $k(G)$ je počet komponent souvislosti multigrafu G. Připomeňme také, že hodnost matice se v lineární algebře definuje jako dimenze vektorového prostoru generovaného sloupci té matice (nebo ekvivalentně dimenze prostoru generovaného řádky té matice). Dokažte, že hodnost G je rovna hodnosti matice M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ [2 body].

Příklad 2. Nechť $T_G(x, y)$ je Tutteův polynom nějakého neznámého multigrafu G s alespoň jedním vrcholem. Popište, jak lze z polynomu $T_G(x, y)$ získat následující informace:

- počet hran G [1 bod].
- vrcholová barevnost G [1 bod].
- počet smyček v G [2 body].

Poznámka: o multigrafu G nemáme žádné informace kromě jeho Tutteova polynomu. Nevíme tedy například, kolik má vrcholů nebo komponent.

Příklad 3. Označme $a_{n,k}$ počet způsobů, kolika lze číslo n vyjádřit jako součet k lichých kladných čísel. Dva součty pokládáme za různé i tehdy, když se liší jen pořadím sčítanců. Například $a_{7,3} = 6$, protože číslo 7 můžeme vyjádřit jako $5 + 1 + 1$, $1 + 5 + 1$, $1 + 1 + 5$, $3 + 3 + 1$, $3 + 1 + 3$ a $1 + 3 + 3$. Najděte vzoreček v uzavřeném tvaru (tj. bez použití nekonečných sum) pro mocninnou řadu $A(x, y) = \sum_{n\geq 0} \sum_{k\geq 0} a_{n,k} x^n y^k$ [2 body].

Příklad 4. Označme a_n počet permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$, které nemají žádný pevný bod, tj. všechny jejich cykly mají délku aspoň 2. Najděte vzorec pro exponenciální vytvořující funkci

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Vyjádřete $A(x)$ jako výraz bez nekonečných sum, využívající známé funkce, jako e^x nebo $\ln(x)$ [3 body].

Poznámka: k vyřešení této úlohy není nutné vyžívat vzorec pro čísla a_n, který znáte z prvního ročníku jako řešení 'problému šatnářky'.

Příklad 5. Mějme "šachovnici" se třemi řádky a třemi sloupci. Spočítejte, kolik existuje neizomorfních způsobů, jak obarvit devět políček této šachovnice pomocí n barev. Dvě obarvení jsou izomorfní, pokud lze jedno převést na druhé pomocí rotace nebo vodorovného, svislého či diagonálního překlopení. Neklademe žádná omezení na možné barvy políček, tj. například sousední políčka mohou být obarvena stejnou barvou [2 body].