Analytická Kombinatorika — Zkouška

Svá řešení můžete posílat kdykoliv až do konce září. Smíte používat jakoukoliv metodu, která se vám zdá vhodná, tedy nikoliv jen metody z přednášky. Můžete posílat i částečná řešení, tj. řešení jen některých příkladů. Můžete také posílat i opravená řešení příkladů, které jste napoprvé nevyřešili správně, ovšem podle okolností vám za nesprávná řešení mohu odečíst nějaké body, i když později chyby opravíte. Ve svých řešeních můžete bez důkazu použít libovolné tvrzení z přednášky. Čísla ve čtverečku označují počty bodů za jednotlivé příklady.

Známkování se bude řídit následující tabulkou:

počet bodů	0–7	8–11	12–14	15–∞
známka	4	3	2	1

---

1. Uvažujme posloupnosti n nezávislých hodů spravedlivou mincí. Každý hod dá buď výsledek 'panna' (což označím symbolem P), nebo 'orel' (O), takže posloupnost hodů budu reprezentovat slovem délky n nad abecedou $\{O, P\}$.

$\boxed{2}$ (a) Předpokládejme, že budeme házet mincí tak dlouho, dokud nám nepadne třikrát po sobě orel. Jaký bude průměrný počet hodů?

$\boxed{4}$ (b) Dva hráči, Augustus a Brutus, hrají následující hru: nejdřív si Augustus vybere slovo w_A délky 3 nad abecedou $\{O, P\}$ a řekne ho Brutovi. Potom si Brutus vybere nějaké jiné slovo w_B délky 3 nad abecedou $\{O, P\}$ a řekne ho Augustovi. Pak hráči společně hází mincí tak dlouho, až se v posloupnosti hodů objeví tři po sobě jdoucí hody tvořící buď slovo w_A nebo slovo w_B. Hráč, jehož slovo se objeví jako první, je vítěz. Jestliže si Augustus zvolí slovo OOP, jaké slovo by si měl zvolit Brutus, aby maximalizoval pravděpodobnost své výhry, a jaká pak bude pravděpodobnost, že Brutus vyhraje?

2. Pojmem *involuce* se označuje permutace, jejíž každý cyklus má délku 1 nebo 2. Označme I_n počet involucí množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

$\boxed{1}$ (a) Dokažte, že $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \le I_n$.

$\boxed{2}$ (b) Dokažte, že $I_n \le n! e^{\sqrt{n}} (e/n)^{n/2}$.

$\boxed{?}$ (c) Zlepšete některý z předchozích dvou odhadů. (Počet bodů bude záviset na tom, jak bude váš odhad dobrý.)

3. Definujme dvě posloupnosti čísel $(a_0, a_1, \dots)$ a $(b_0, b_1, \dots)$ následovně:

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4k} \qquad \text{a}$$

$$b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \cdots = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/4 \rfloor} \binom{n}{4k+1}.$$

$\boxed{1}$ (a) Najděte vytvořující funkce pro posloupnosti a_n a b_n.

$\boxed{3}$ (b) Rozhodněte, zda je posloupnost $a_n - b_n$ omezená.

4. *Unárně-binární strom* je zakořeněný strom, jehož každý vnitřní vrchol má buď jednoho potomka, nebo právě dva potomky, u nichž je rozlišeno, který je pravý a který je levý. Označme t_n počet neprázdných unárně-binárních stromů na n vrcholech. Posloupnost t_n tedy začíná $0, 1, 1, 2, 4, \dots$.

$\boxed{1}$ (a) Najděte vytvořující funkci pro posloupnost t_n.

$\boxed{3}$ (b) Odvoďte pro t_n asymptotický odhad ve tvaru $t_n = \alpha n^\beta \gamma^n (1 + o(1))$, pro vhodné konstanty α, β, γ.