

Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I
desátá série, verze pro cvičení ve čtvrtek 17:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 15. 5. v 17:20.

Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

- 2 1. Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé: “Když G je vrcholově 2-souvislý graf, x, y nějaké jeho dva různé vrcholy a P nějaká cesta v grafu G s koncovými vrcholy x a y , tak v grafu G vždy existuje další cesta Q s koncovými vrcholy x a y , která je vnitřně vrcholově disjunktní s P .”
- 2 2. Nechť $G = (V, E)$ je graf s alespoň čtyřmi vrcholy. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:
- (a) G je vrcholově 2-souvislý.
 - (b) Pokud x_1, x_2, y_1, y_2 jsou čtyři různé vrcholy G , tak v G existují dvě vrcholově disjunktní cesty P a Q , z nichž každá má jeden koncový vrchol v množině $\{x_1, x_2\}$ a druhý koncový vrchol v množině $\{y_1, y_2\}$. (Poznámka: to, že P a Q jsou vrcholově disjunktní, mimo jiné znamená, že nesdílejí žádný společný koncový vrchol.)
- 2 3. Ukažte, že každý vrcholově 2-souvislý graf na n vrcholech má aspoň n různých koster.
- 2 4. Nechť $G = (V, E)$ je libovolný graf. Definujme na jeho množině vrcholů relaci R následovně: pro $(x, y) \in V \times V$ platí $(x, y) \in R$ právě když buď $x = y$, nebo G obsahuje dvě hranově disjunktní cesty z x do y . Dokažte, že R je ekvivalence. Nápověda: můžete třeba nejdřív dokázat, že když nějaké dva vrcholy x, y nejsou v relaci R , tak buď leží v různých komponentách G , nebo existuje hrana $e \in E$ taková, že x a y jsou v různých komponentách $G - e$. (Poznámka: třídy ekvivalence R se občas označují jako ‘komponenty hranově 2-souvislosti’ grafu G .)