

Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I
devátá série, verze pro cvičení ve čtvrtek 12:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 24. 4. ve 12:20.

Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

1. Necht' $k_v(G)$ a $k_e(G)$ označují vrcholovou a hranovou souvislost grafu G . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

2

(a) Každý graf G , pro který platí $k_e(G) \neq k_v(G)$, obsahuje vrchol stupně aspoň 4.

1

(b) Necht' $G = (V, E)$ je graf a $v \in V$ nějaký jeho vrchol. Označme $G - v$ graf vzniklý z G odstraněním vrcholu v a všech hran incidentních s v . Potom $k_v(G - v) \leq k_v(G)$ a také $k_e(G - v) \leq k_e(G)$.

1+2

2. Necht' M je nějaká matice tvaru $m \times n$, jejíž prvky jsou nuly a jedničky. Řádky a sloupce M budeme souhrnně označovat jako *linie* M , takže M má $m + n$ linií. Řekneme, že nějaká množina linií $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ *pokrývá* matici M , pokud každá jednička v M je obsažena v některé z linií v \mathcal{L} . Necht' $\ell(M)$ označuje velikost nejmenší množiny linií pokrývající M . Necht' $j(M)$ označuje největší číslo k takové, že v M lze najít k jedniček z nichž žádné dvě neleží na společné linii. Dokažte, že $\ell(M) = j(M)$. Za důkaz rovnosti dostanete 3 body, pokud dokážete jen jednu z nerovností ($\ell(M) \leq j(M)$ nebo $\ell(M) \geq j(M)$), dostanete 1 bod.

(Příklad: následující matice

$$M = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

má $\ell(M) = 3$, protože ji lze pokrýt prvním řádkem, druhým sloupcem a čtvrtým sloupcem, ale nelze ji pokrýt pomocí dvou linií. Pro M také platí $j(M) = 3$, protože například jedničky na pozicích $(2, 2)$, $(1, 3)$ a $(4, 4)$ nesdílejí žádnou linii, ale mezi libovolnými čtyřmi jedničkami budou vždy aspoň dvě na stejné linii.)

Následující příklad je převzatý z předchozí série. Pokud už jste ho vyřešili v předchozí sérii, nemusíte ho samozřejmě řešit znovu.

2

3. Máme dány dvě posloupnosti (a_1, \dots, a_m) a (b_1, \dots, b_n) nezáporných celých čísel. Naším cílem je najít matici nul a jedniček s m řádky a n sloupci tak, aby pro každé $i \in [m]$ a $j \in [n]$ platilo, že i -tý řádek obsahuje přesně a_i jedniček a j -tý sloupec obsahuje přesně b_j jedniček. Najděte algoritmus, který pro zadaná (a_1, \dots, a_m) a (b_1, \dots, b_n) v polynomiálním čase rozhodne, zda taková matice existuje, a případně takovou matici zkonstruuje. Nezapomeňte dokázat, že Váš algoritmus úlohu skutečně řeší.