Úlohy k 9. cvičení

1. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice $\boldsymbol{A}$ jsou vzájemně kolmé.

2. Zjistěte které analogie následujících vztahů pro množinový doplněk,

(konkrétně pro množiny $A, B : \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B,$)

platí i pro ortogonální doplněk množinových operací na prostorech $U$ a $V$, resp. množinách $X$ a $Y$:

a) $(U \cup V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$,

b) $(X \cup Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$,

c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp \cup V^\perp$,

d) $(U \cap V)^\perp = \mathrm{span}(U^\perp \cup V^\perp)$,

e) $(U \setminus V)^\perp = U^\perp \cup V$.

f) $(U \setminus V)^\perp = \mathrm{span}(U^\perp \cup V)$.

3. Rozhodněte, zdali je následující matice pozitivně definitní pomocí Gaussovy eliminace a determinantů. Pokud ano, nalezněte její Choleského rozklad.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$

4. Ukažte, že pro pozitivně definitní matice $A$ a $B$ jsou matice $A + B$ a $A^{-1}$ pozitivně definitní (t.j. ukažte zároveň, že $A$ je regulární).

5. Spočtěte Choleského rozklad matice $\mathbf{A}$ a použijte ho k řešení soustavy $\mathbf{Ax} = (10, 21, -32, 26, 23)^{\mathrm{T}}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$