

Jméno a příjmení:

Kolik času jste potřebovali na vyřešení úloh? (včetně zápisu řešení):

1. V prostoru \mathbb{R}^4 se standardním skalárním součinem nalezněte ortonormální bázi řádkového prostoru následující matice

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 2 \\ -6 & 4 & -8 & 3 \\ 8 & 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Poté získanou bázi doplňte na ortonormální bázi celého prostoru \mathbb{R}^4 .

(Rada: matici před ortonormalizací neupravujte, jinak riskujete numericky nepřekné výsledky.)

2. Najděte \mathbf{x}' takové, že minimalizuje $\|\mathbf{Ax}' - \mathbf{b}\|$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (26, 5, 34, -18, -30, -13)^T$$

Určete také hodnotu $\|\mathbf{Ax}' - \mathbf{b}\|$. (Jde o normu vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu).
K výpočtům můžete použít počítač.

3. *Bonus za extra 5 bodů.*

Ve firmě ACME s.r.o. vyvinuli potravinové barvy, které změni barvu po vystavení teple. Plánují před velikonocí vydat nový produkt: „kouzelná vajíčka“. Jedná se o balení tří vajíček, která zpočátku vypadají jako běžná, bílá vajíčka, ale při vaření změni barvu a stanou se z nich barevná, velikonoční vajíčka, každé jiné barvy.

Vedoucí pracovníci se dlouho nemohli dohodnout, v jakých barvách chtějí vajíčka prodávat. Původně plánovali vyrobit tyto tři barvy:

1. fialová (25.0 % azurové a 75.0 % purpurové)
2. červená (50.0 % purpurové a 50.0 % žluté)
3. modrá (87.5 % azurové a 12.5 % žluté)

Na poslední chvíli se ale rozhodli se pro tyto tři barvy:

1. tyrkysová (77.5 % azurové, 10.0 % purpurové a 12.5 % žluté)
2. zelená (40.0 % azurové, 10.0 % purpurové a 50.0 % žluté)
3. růžová (15.0 % azurové a 85.0 % purpurové)

Ve zmatku způsobeném změnami na poslední chvíli pracovníci logistického centra ACME s.r.o. udělali zásadní chybu: Do některých závodů poslali (očíslované) barely s původními třemi barvami, zatímco do jiných poslali barely s novými třemi barvami. Velikonoce se blíží, a už nemají čas závodům poslat nové barvy. Nemohou však dopustit, aby balení z různých závodů obsahovala vajíčka různých barev, protože pokud se barvy uvařených vajíček nebudou přesně shodovat s promočními materiály, vystavovali by se riziku žaloby za klamavou reklamu.

V závodech nemohou poznat, jakou trojici barev dostali, ale mohou své barvy míchat v libovolných poměrech. Určete, v jakých třech poměrech mají v každém závodě své barvy smíchat, aby v každém závodě vyprodukovali vajíčka ve třech různých barvách, ale aby tyto tři barvy byly napříč všemi závody stejné.

K výpočtům můžete použít počítač.

Instrukce k řešení domácích úloh: Důležitý je nejen výsledek (ten lze s různou přesností zjistit různými způsoby: graficky, analyticky, apod.), ale především způsob, jak jste k němu dospěli. Srozumitelně popište podstatné kroky svých úvah. Přehledně запиšte výpočty použité k odvození výsledku. U numerických výsledků spočítejte i konkrétní čísla. Algebraické výrazy co nejvíce zjednodušte. Nezapomeňte na odpověď (a pro svůj klid ani na zkoušku, jde-li ji provést).

Úlohy si nejprve vyřešte stranou. Odevzdávejte až čistopis svého řešení bez chyb a škrtnání. Nečitelné práce se nehodnotí. K odevzdání použijte nejlépe owl na kam.mjf.cuni.cz/owl, nebo je vypracujte na papír. K tomu si můžete vytisknout i toto zadání a řešení zapsat na volné místo na stránce.

Dojde-li vám na papíře místo, vezměte další listy kancelářského papíru formátu A4, každý podepište, očísľujte a uveďte jejich počet. Odevzdané papíry budou skenovány, proto je nesešvívejte ani neslepujte.