Úlohy k 5. cvičení

1. Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$.

   Rozhodněte, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

   a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Rozložte následující matici na součin $\boldsymbol{RJR}^{-1}$, kde matice $\boldsymbol{R}$ je regulární a matice $\boldsymbol{J}$ je v Jordanově normálním tvaru.

   a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

3. S využitím Jordanova normálního tvaru spočtěte třetí mocninu a druhou odmocnimu následující matice

   (Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

   a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

4. Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Ukažte jednoduchým způsobem, že Cayley-Hamiltonova věta platí pro diagonalizovatelné matice.