Úlohy k 3. cvičení

1. Pomocí adjungované matice najděte matici inverzní (pokud existuje) k následující matici a to jak nad tělesem reálných čísel tak i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

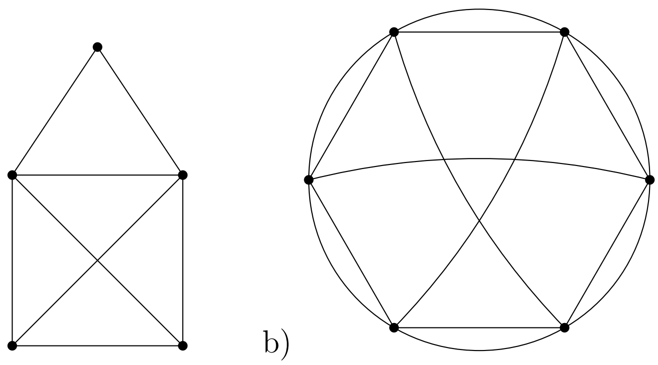
2. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\boldsymbol{a} = (3,1,1)^T$, $\boldsymbol{b} = (2,1,1)^T$ a $\boldsymbol{c} = (2,3,2)^T$.

   (Rovnoběžnostěn v prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$, kde $\alpha,\beta,\gamma \in \langle 0,1\rangle$.)

3. Nechť lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory $\boldsymbol{a} = (1,3,1)^T, \boldsymbol{b} = (1,0,3)^T, \boldsymbol{c} = (1,1,1)^T$ na vektory $f(\boldsymbol{a}) = (3,1,0)^T, f(\boldsymbol{b}) = (1,0,2)^T, f(\boldsymbol{c}) = (4,1,5)^T$.

   Určete objem V elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

4. Určete počet koster následujících (multi)grafů:



a) b)

5. Určete součet, rozdíl, součin a podíl následujících polynomů p a q.

   a) $p(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 3$, $q(x) = 3x^2 - 1x + 5$ nad $\mathbb{R}$

   b) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$, $q(x) = x^2 + 2x + 2$ nad $\mathbb{Z}_5$.

6. V tělese $\mathbb{Z}_p$ nalezněte polynom, stupně nejvýše p, který nabývá stejných hodnot pro $x \in \mathbb{Z}_p$.

   a) V tělese $\mathbb{Z}_5$, $p(x) = 4x^{20} + 3x^{17} + 2x^{16} + x^{13} + 3x^{12} + 2x^{10} + 4x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x + 3$.

   b) V tělese $\mathbb{Z}_7$, $p(x) = 5x^{16} + 6x^{15} + 4x^{13} + x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 5x^5 + 2x + 1$.

7. Určete, kolik je různých polynomů p stupně právě tři nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ takových, že $p(3) = 2$. Popište všechny takové polynomy.

8. Pomocí Lagrangeovy interpolace proložte kvadratický polynom (parabolu) body

   a) $(-1,-9)$, $(1,-3)$ a $(2,3)$ b) $(-1,10)$, $(1,4)$ a $(4,25)$