# Písemka z Kombinatoriky a grafů 22.5.2012

*Vše, co tvrdíte, zdůvodněte. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a ze cvičení, vždy ale napište znění takového tvrzení. Nepoužívejte zápisky, učebnice ani kalkulačky. V případě nejasnosti v zadání se neváhejte zeptat.*

1. Určete počet surjektivních zobrazení z $(n+1)$-prvkové množiny $M$ na $n$-prvkovou množinu $N$. [7 bodů]

2. Uvažujme rekurenci
$$a_0 = p, \qquad \forall n \geq 1: \; a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i.$$
Určete množinu všech hodnot $p \in \mathbb{R}$, za kterých bude platit tvrzení
$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq 2^n + 2012.$$
To, že tvrzení pro tyto hodnoty $p$ splněno bude a pro ostatní nebude, samozřejmě také dokažte. [8 bodů]

3. Uvažujme množinový systém $(P, \mathcal{L})$, kde $P \neq \emptyset$, $\mathcal{L} \neq \emptyset$ a každá $L \in \mathcal{L}$ je neprázdnou podmnožinou $P$, který splňuje:
   - $(P1)$ každá dvojice různých přímek $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ má společný právě jeden bod z $P$,
   - $(P2)$ pro každou dvojici různých bodů $p_1, p_2 \in P$ existuje právě jedna přímka $L \in \mathcal{L}$ obsahující $p_1$ i $p_2$.

   Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou pro takovýto systém $(P, \mathcal{L})$ ekvivalentní.
   - $(P0)$ Existuje čtveřice $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ taková, že žádné tři z bodů této čtveřice neleží na společné přímce.
   - $(P0')$ Alespoň dvě přímky obsahují každá alespoň tři body, tedy $\exists L_1, L_2 \in \mathcal{L} : L_1 \neq L_2,\ |L_1| \geq 3,\ |L_2| \geq 3.$ [8 bodů]

4. Dokažte, že body libovolné konečné projektivní roviny lze očíslovat $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a přímky $L_1, L_2, \ldots, L_m$ tak, aby pro každé $i$ platilo, že $p_i$ je prvkem $L_i$. [9 bodů]

5. Ač to tak na první pohled nevypadá, graf na obrázku je bipartitní. Najděte v něm párování s největším možným počtem hran. Dokažte, že žádné větší párování graf nemá. [8 bodů]