Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

8. série: Souvislost grafu a počet koster

Termín odevzdání: **15.5.2012** 10:40

1. Dokažte, že graf G s alespoň $2k$ vrcholy je vrcholově k-souvislý právě tehdy, když pro každou dvojici disjunktních množin X, Y splňující $|X| = |Y| = k$ existuje k vrcholově disjunktních cest mezi X a Y, tj. každý vrchol G (včetně těch v $X \cup Y$) leží na nejvýše jedné z nich. Můžete bez důkazu použít Mengerovu větu a fakt, že přidáním vrcholu stupně k ke G se neporuší vrcholová k-souvislost. [4 body]

2. Dokažte, že každý hranově 2-souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech má alespoň n různých koster. [3 body]

3. Označme Q_d graf d-dimenzionální hyperkrychle definovaný v minulé sérii.

   (a) Spočítejte počet koster Q_3. Postup podrobně popište. [2 body]

   (b) Dokažte, že pro každé $d \geq 2$ je počet koster Q_d nejvýše $(e \log_2(n))^n$, kde $n = 2^d$ je počet vrcholů Q_d. [2 body]

   (c) Dokažte, že pro každé $d \geq 2$ je počet koster Q_d alespoň $(\log_2(n)/1000)^n$, kde $n = 2^d$ je počet vrcholů Q_d. Body lze získat i za slabší odhady, například za $2^{n-\log_2(n)-1}$ budou 3 body. [5 bodů]

Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

8. série: Souvislost grafu a počet koster

Termín odevzdání: **15.5.2012** 10:40

1. Dokažte, že graf G s alespoň $2k$ vrcholy je vrcholově k-souvislý právě tehdy, když pro každou dvojici disjunktních množin X, Y splňující $|X| = |Y| = k$ existuje k vrcholově disjunktních cest mezi X a Y, tj. každý vrchol G (včetně těch v $X \cup Y$) leží na nejvýše jedné z nich. Můžete bez důkazu použít Mengerovu větu a fakt, že přidáním vrcholu stupně k ke G se neporuší vrcholová k-souvislost. [4 body]

2. Dokažte, že každý hranově 2-souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech má alespoň n různých koster. [3 body]

3. Označme Q_d graf d-dimenzionální hyperkrychle definovaný v minulé sérii.

   (a) Spočítejte počet koster Q_3. Postup podrobně popište. [2 body]

   (b) Dokažte, že pro každé $d \geq 2$ je počet koster Q_d nejvýše $(e \log_2(n))^n$, kde $n = 2^d$ je počet vrcholů Q_d. [2 body]

   (c) Dokažte, že pro každé $d \geq 2$ je počet koster Q_d alespoň $(\log_2(n)/1000)^n$, kde $n = 2^d$ je počet vrcholů Q_d. Body lze získat i za slabší odhady, například za $2^{n-\log_2(n)-1}$ budou 3 body. [5 bodů]