Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

7. série

Termín odevzdání: **24.4.2012** 10:40

1. Matice obsahující hodnoty pouze 0 a 1 se nazývá $(0,1)$-matice. Uvažujme libovolnou $(0,1)$-matici A velikosti $n \times n$. *Linie* v A jsou řádky a sloupce A. Dokažte, že velikost největší množiny jedniček A, z nichž žádné dvě neleží ani ve stejném řádku ani sloupci, je stejná jako velikost nejmenší množiny linií v A, které pokryjí všechny jedničky. [2 body]

2. Uvažujme graf d-dimenzionální hyperkrychle ($d \geq 2$). To je graf, jehož vrcholy jsou posloupnosti nul a jedniček délky d a dva vrcholy jsou spojeny hranou, právě když se jejich posloupnosti liší v právě jedné souřadnici. Každé hraně přidělíme jednotkovou kapacitu. Nalezení maximálního toku znamená určení velikostí a směrů toků každou hranou, nikoli pouze určení velikosti maximálního toku. To, že nalezený tok je maximální vždy také dokažte.

   (a) Nakreslete graf 3-dimenzionální hyperkrychle. V tomto grafu najděte Fordovým–Fulkersonovým algoritmem maximální tok ze $z = (0,0,0)$ do $s = (1,1,1)$. V každém kroku algoritmu napište použitou zlepšující cestu a velikost toku poslaného po této zlepšující cestě. Navíc jako první zlepšující cestu musíte použít $((0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1))$ s tokem 1. [2 body]

   (b) Pro každé $d \geq 2$ najděte maximální tok z $(1,1,\ldots,1,1,0)$ do $(1,1,\ldots,1,1,1)$. [2 body]

   (c) Pro každé $d \geq 2$ najděte maximální tok ze zdroje $z = (0,0,0,\ldots,0)$ do stoku $s = (1,1,1,\ldots,1)$, takový, aby každou hranou protékal nenulový tok. [2 body]

3. Dokažte, že každý graf na $n \geq 3$ vrcholech, z nichž každý má stupeň alespoň d, kde $d \geq (n-1)/2$, je hranově d-souvislý. [3 body]

Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

7. série

Termín odevzdání: **24.4.2012** 10:40

1. Matice obsahující hodnoty pouze 0 a 1 se nazývá $(0,1)$-matice. Uvažujme libovolnou $(0,1)$-matici A velikosti $n \times n$. *Linie* v A jsou řádky a sloupce A. Dokažte, že velikost největší množiny jedniček A, z nichž žádné dvě neleží ani ve stejném řádku ani sloupci, je stejná jako velikost nejmenší množiny linií v A, které pokryjí všechny jedničky. [2 body]

2. Uvažujme graf d-dimenzionální hyperkrychle ($d \geq 2$). To je graf, jehož vrcholy jsou posloupnosti nul a jedniček délky d a dva vrcholy jsou spojeny hranou, právě když se jejich posloupnosti liší v právě jedné souřadnici. Každé hraně přidělíme jednotkovou kapacitu. Nalezení maximálního toku znamená určení velikostí a směrů toků každou hranou, nikoli pouze určení velikosti maximálního toku. To, že nalezený tok je maximální vždy také dokažte.

   (a) Nakreslete graf 3-dimenzionální hyperkrychle. V tomto grafu najděte Fordovým–Fulkersonovým algoritmem maximální tok ze $z = (0,0,0)$ do $s = (1,1,1)$. V každém kroku algoritmu napište použitou zlepšující cestu a velikost toku poslaného po této zlepšující cestě. Navíc jako první zlepšující cestu musíte použít $((0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1))$ s tokem 1. [2 body]

   (b) Pro každé $d \geq 2$ najděte maximální tok z $(1,1,\ldots,1,1,0)$ do $(1,1,\ldots,1,1,1)$. [2 body]

   (c) Pro každé $d \geq 2$ najděte maximální tok ze zdroje $z = (0,0,0,\ldots,0)$ do stoku $s = (1,1,1,\ldots,1)$, takový, aby každou hranou protékal nenulový tok. [2 body]

3. Dokažte, že každý graf na $n \geq 3$ vrcholech, z nichž každý má stupeň alespoň d, kde $d \geq (n-1)/2$, je hranově d-souvislý. [3 body]