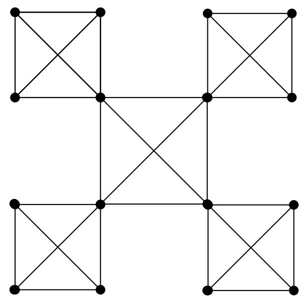
# Písemka z Kombinatoriky a grafů 7.5.2008

*Vše, co tvrdíte, zdůvodněte. Můžete bez důkazu používat tvrzení z přednášky a ze cvičení, vždy ale napište znění takového tvrzení. Nepoužívejte zápisky, učebnice ani kalkulačky. V případě nejasnosti v zadání se neváhejte zeptat.*

1. Spočtěte počet koster grafu na obrázku. [7 bodů]



2. Určete všechny dvojice $(m, n)$ (splňující $n \geq m \geq 1$) takové, že hrany grafu $K_n$ lze pokrýt kopiemi grafu $K_m$ (tj. každá hrana musí být v alespoň jedné kopii) tak, aby každé dvě kopie měly společný právě 1 vrchol $K_n$. [7 bodů]

3. Najděte vzorce pro $n$-tý člen posloupností určených vytvořujícími funkcemi

$$f_1 = \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 + x - 2} \qquad f_2 = \frac{1}{(1-3x)^6} \qquad f_3 = \frac{7x}{32 - x^5}$$

[9 bodů]

4. Nechť $hk(G)$ značí počet hamiltonovských kružnic v grafu $G$ a $hc(G)$ počet jeho hamiltonovských cest. Dokažte, že pro každý graf $G$ platí $hc(G) \geq |V(G)| \cdot hk(G)$. [4 body]

5. Pro každé $m \geq 0$ najděte graf, který má právě $m$ hamiltonovských kružnic. [7 bodů]

6. Zformulujte Ramseyovu větu pro barvení $p$-tic $k$ barvami. [2 body]

7. Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ a každé $k \geq 1$ existuje $N$ takové, že při libovolném obarvení vrcholů a hran libovolného grafu $G$ na $N$ vrcholech $k$ barvami má $G$ „skorojednobarevný" indukovaný podgraf na $n$ vrcholech. „Skorojednobarevný" indukovaný podgraf znamená, že všechny vrcholy mají stejnou barvu a všechny hrany mají stejnou barvu. [4 body]