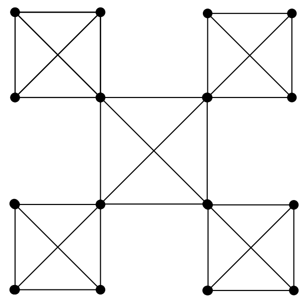
Písemka z Kombinatoriky a grafů 7.5.2008 - řešení

1. Spočtěte počet koster grafu na obrázku. [7 bodů]



Řešení Nechť G značí graf na obrázku. Graf G rozložíme na bloky - blok je maximální (vzhledem k inkluzi) 2-souvislý indukovaný podgraf, nebo most. Bloky grafu G je 5 grafů K_4 - ty označme G_1, G_2, G_3, G_4 a G_5. Všimneme si, že hrany bloků $G_1 \dots G_5$ tvoří rozklad hran grafu G (to dokonce platí obecně pro bloky libovolného grafu).

Ukážeme, že kostry G jsou v bijekci s pěticemi koster grafu K_4 - hrany dané kostry G rozložíme na její průniky s hranami $G_1, \dots, G_5$ a naopak na pětici koster grafu K_4 se podíváme jako na kostry grafů $G_1, \dots, G_5$ a tyto kostry sjednotíme.

(a) Ověříme, že sjednocením koster G_i vznikne kostra G:
- Kostra G_i má 3 hrany $\Rightarrow$ sjednocení koster G_i má 15 hran
- Pokud by sjednocení koster G_i obsahovalo kružnici v grafu G, pak jsou hrany této kružnice podmnožinou hran nějakého maximálního 2-souvislého podgrafu (kružnice je 2-souvislá) a tedy je tato kružnice uvnitř jednoho z G_i. SPOR

(b) Ověříme, že z kostry T grafu G vzniknou kostry grafů G_i:
- Kostra G je acyklická $\Rightarrow$ její průnik s G_i je acyklický
- Označme $T_i := T \cap G_i$. Pro spor je T_i nesouvislá, její vrcholy u a v nejsou v T_i propojeny cestou. Vezmeme sjednocení cesty mezi u a v v T (ta nutně obsahuje hranu e mimo G_i) a hrany $\{u, v\} \in G_i$. Tím jsme dostali kružnici v G obsahující hranu z G_i i hranu mimo G_i. SPOR

Z přednášky už víme, že K_n má n^{n-2} koster, a tedy náš graf G má $(4^2)^5 = 2^{20}$ koster.

2. Určete všechny dvojice (m, n) (splňující $n \geq m \geq 1$) takové, že hrany grafu K_n lze pokrýt kopiemi grafu K_m (tj. každá hrana musí být v alespoň jedné kopii) tak, aby každé dvě kopie měly společný právě 1 vrchol K_n. [7 bodů]

Řešení Nahlédneme, že každá hrana leží v právě 1 kopii grafu K_m - pokud by ležela ve více, pak tyto kopie mají společné alespoň 2 vrcholy, což zadání zakazuje. Vrcholům grafu K_n říkejme body a množinám vrcholů kopií grafu K_m přímky. Zadání je ekvivalentní následujícím třem podmínkám:

- (P0') všechny přímky mají stejnou velikost
- (P1) průnik dvojice přímek je vždy jednobodový

- (P2) každá dvojice bodů leží na právě 1 společné přímce

Je to téměř definice projektivní roviny - v té je pouze místo (P0') podmínka (P0): existuje čtyřbodová množina C taková, že každá přímka obsahuje nejvýše dva body z C

Vidíme, že zadání splňuje libovolná projektivní rovina - (P0') plyne z věty o řádu projektivní roviny z přednášky. Tedy dvojice $(k+1, k^2+k+1)$, kde k je řád nějaké projektivní roviny, je řešením.

Zbývá nám ještě najít množinové systémy splňující (P1), (P2) a (P0'), které nesplňují (P0). Vezměme přímku P,

(a) $\forall u : u \in P$: tomu odpovídá případ $n = m$, který je řešením pro každé $n \geq 1$

(b) $\exists u \notin P$:

  i. $m = 1$, označme $P = \{v\}$: Dvojice $\{u, v\}$ neleží na přímce, protože přímky mají velikost 1. SPOR s (P2)

  ii. $m = 2$, označme $P = \{v, w\}$: Kvůli (P2) existují přímky $Q = \{u, v\}$ a $R = \{u, w\}$. Pokud je to už vše, dostáváme řešení (2,3). Jinak existuje bod x a přímka $\{u, x\}$, která má prázdný průnik s P (SPOR s (P1)).

  iii. $m \geq 3$, označme $v, w, x \in P$: Označme R přímku obsahující dvojici $\{u, v\}$ a vezměme $y \in R \setminus \{u, v\}$. Za C zvolíme $\{w, x, u, y\}$ a zjistíme, že žádná trojice bodů z C neleží na přímce (Taková přímka by totiž nutně obsahovala buď dvojici $\{w, x\}$, nebo $\{u, y\}$ a byla by to buď P, nebo R. Ty ale obsahují jen 2 body z C.) SPOR

Řešeními jsou právě dvojice $(2, 3)$, (n, n) pro libovolné $n \geq 1$ a $(k+1, k^2+k+1)$ pro k, které je řádem nějaké projektivní roviny.

3. Najděte vzorce pro n-tý člen posloupností určených vytvořujícími funkcemi

$$f_1 = \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 + x - 2} \qquad f_2 = \frac{1}{(1-3x)^6} \qquad f_3 = \frac{7x}{32 - x^5}$$

[9 bodů]

Řešení

- f_1 Zjednodušíme zlomek

$$f_1 = \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 + x - 2} = \frac{x-7}{x-1} = \frac{7-x}{1-x}$$

  Posloupnost je tedy $a_0 = 7$ a $a_n = 6$ pro $n \geq 1$.

- f_2 Na cvičení jsme si ukazovali zobecněnou binomickou větu:

$$1/(1-x)^k = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1}x + \binom{k+1}{k-1}x^2 + \binom{k+2}{k-1}x^3 \dots$$

  Tu použijeme pro $k = 6$ a poté provedeme operaci (E): dosazení $3x$ za x. Dostaneme $a_n = \binom{5+n}{5}3^n$.

- f_3 Upravíme

$$f_3 = \frac{7x}{32 - x^5} = \frac{7}{32} x \frac{1}{1 - (\frac{x}{2})^5}$$

Pomocí (F) a (E) (v tomto pořadí) získáme posloupnost pro vytvořující funkci $\frac{1}{1-(\frac{x}{2})^5}$:

$$b_n = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & \text{pokud } 5|n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Posloupnost pro vytvořující funkci f_3 je

$$a_n = \begin{cases} \frac{7}{32} \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} & \text{pokud } 5|(n-1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

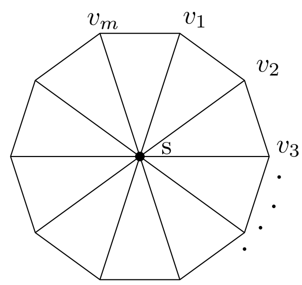
4. Nechť $hk(G)$ značí počet hamiltonovských kružnic v grafu G a $hc(G)$ počet jeho hamiltonovských cest. Dokažte, že pro každý graf G platí $hc(G) \geq |V(G)| \cdot hk(G)$. [4 body]

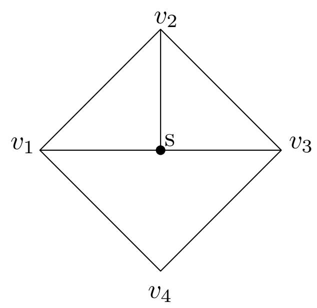
Řešení Odstraněním libovolné hrany z ham. kružnice získáme ham. cestu. Takto získáme $|V(G)| \cdot hk(G)$ ham. cest, musíme ale ještě ověřit, že jsou navzájem různé.

Pokud by 2 ze vzniklých ham. cest byly stejné, musely vzniknout odebráním různých hran z ham. kružnice. To ale není možné, protože jsou-li u a v koncové body dané ham. cesty, pak jediný způsob, jak ji doplnit přidáním jedné hrany na ham. kružnici je přidat hranu $\{u, v\}$.

5. Pro každé $m \geq 0$ najděte graf, který má právě m hamiltonovských kružnic. [7 bodů]

Řešení Pro $m = 0$ stačí vzít jako G 2 vrcholy spojené hranou, pro $m = 1$ kružnici libovolné délky a pro $m = 2$ vezmeme graf na obrázku vpravo. Pro $m \geq 3$ je jedno možné řešení graf na obrázku vlevo





Vrchol s leží ve 2 z $m + 1$ hran libovolné ham. kružnice, a tedy zbylých $m - 1$ hran ham. kružnice jsou hrany kružnice $v_1 \dots v_m$. Počet jejich různých výběrů je m a snadno nahlédneme, že každý určuje právě 1 ham. kružnici.

6. Zformulujte Ramseyovu větu pro barvení p-tic k barvami. [2 body]

Řešení Množinu $\{1, 2, \dots, i\}$ budeme značit $[i]$. Jedno možné znění je následující.

$$\forall n \forall k \forall p \exists N \forall c : \binom{[N]}{p} \to [k] \;\; \exists A \subseteq [N], |A| = n \;\; \exists i \forall B \in \binom{A}{p} : c(B) = i$$

Slovy: Pro každou trojici hodnot n, k, p existuje číslo N takové, že při libovolném obarvení množiny p-prvkových podmnožin množiny $[N]$ k barvami vždy najdeme množinu A velikosti n, jejíž všechny p-prvkové podmnožiny mají stejnou barvu.

7. Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ a každé $k \geq 1$ existuje N takové, že při libovolném obarvení vrcholů a hran libovolného grafu G na N vrcholech k barvami má G „skorojednobarevný" indukovaný podgraf na n vrcholech. „Skorojednobarevný" indukovaný podgraf znamená, že všechny vrcholy mají stejnou barvu a všechny hrany mají stejnou barvu. [4 body]

   Řešení Označme $R_k(n)$ Ramseyovo číslo pro barvení hran úplného grafu k barvami, kde hledáme jednobarevný úplný podgraf velikosti n. Úlohu dokážeme pro volbu $N := k(R_k(n) - 1) + 1$.

   Graf G doplníme přidáním libovolně obarvených hran na úplný graf. Poté díky holubníkovému principu najdeme $R_k(n)$ vrcholů obarvených stejnou barvou. Na nich pomocí Ramseyovy věty najdeme úplný graf na n vrcholech se stejnobarevnými hranami.