Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů

11. série

Termín odevzdání: Neomezený

1. Spočítejte počet koster Petersenova grafu (to, jak vypadá, najdete např. v anglické wikipedii). [3 body]

2. Rozhodněte, zda je graf incidence Fanovy roviny rovinný. (Graf incidence je bipartitní graf, kde partity jsou množina bodů a množina přímek. V grafu je mezi bodem a přímkou hrana právě tehdy, když bod leží na přímce.) [3 body]

3. Dokažte, že graf incidence každé projektivní roviny má obvod právě 6. Obvod grafu je délka nejkratší kružnice. [3 body]

4. Které z následujících množin tvoří podprostor vektorového prostoru všech podmnožin množiny hran grafu $G = (V, E)$? U těch, které tvoří, určete dimenzi a najděte bázi.

   (a) $\{A \subseteq E : |A| = 0 \mod 2\}$

   (b) $\{A \subseteq E : |A| = 1 \mod 2\}$

   (c) $\{A \subseteq E : e \in A\}$, kde e je nějaká pevně zvolená hrana.

   (d) $\{A \subseteq E : e \notin A\}$, kde e je nějaká pevně zvolená hrana.

   [6 bodů]

5. Navrhněte očíslování stěn dvou šestistěnných kostek přirozenými čísly takové, že každý součet padne se stejnou pravděpodobností jako u dvojice klasických kostek, ale přitom se o klasické kostky nejedná. V tomto příkladě se 0 nepovažuje za přirozené číslo. Je dovoleno, aby kostka měla na více stěnách to samé číslo. [4 body]

6. Dokažte, že každý souvislý graf je 3-hamiltonovský. Graf G na n vrcholech je k-hamiltonovský, pokud existuje očíslování $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ všech jeho vrcholů takové, že $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : dist_G(v_i, v_{i+1}) \leq k$, kde $v_{n+1} := v_1$. (Tedy hamiltonovské grafy jsou právě 1-hamiltonovské grafy.) [5 bodů]

7. Najděte souvislý graf, který není 2-hamiltonovský. [3 body]

8. Najděte obarvení množiny všech bodů roviny dvěma barvami takové, že nenajdeme jednobarevný rovnostranný trojúhelník se stranami délky 1. [4 body]

9. Najděte síť na 6 vrcholech, na které se Ford-Fulkersonův algoritmus při vhodných výběrech zlepšujících cest nikdy nezastaví. [6 bodů]

10. Nechť F je formule v konjunktivně normálním tvaru taková, že všechny klauzule mají velikost 3 a každá proměnná se vyskytuje nejvýše ve 3 klauzulích. Dokažte, že taková formule je vždy splnitelná (tj. že existuje přiřazení pravdivostních hodnot proměnným takové, že F je splněna). [2 body]

11. Dokažte, že hrany každého rovinného grafu lze zorientovat tak, že z každého vrcholu budou vycházet nejvýše 3 orientované hrany. [4 body]