Písemka - podivný důkaz

Jméno: Kruh:

Tvrzení 1: Definujme posloupnost $a_1, a_2, ...$ následovně:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2} \\ a_n &= \frac{2}{a_{n-1}+1} - 1 \qquad\qquad \text{pro } n \geq 2 \end{aligned}$$

Pak $a_n \geq 0$ pro každé $n \geq 1$.

Důkaz. Postupujme indukcí. Pro $n = 1$ vyplývá tvrzení z definice. Předpokládejme tedy, že $n \geq 2$ a že $a_{n-1} \geq 0$. Chceme dokázat nerovnost

$$a_n = \frac{2}{a_{n-1}+1} - 1 \quad \geq \quad 0. \tag{1}$$

Nyní budeme nerovnost upravovat.

$$\begin{aligned} \frac{2}{a_{n-1}+1} - 1 &\geq 0 && \qquad (2) \\ \frac{2}{a_{n-1}+1} &\geq 1 && \text{(přičtení 1)} \qquad (3) \\ 2 &\geq a_{n-1}+1 && \text{(násobení } a_{n-1}+1\text{, což je} \geq 0 \text{ dle indukce)} \qquad (4) \\ 1 &\geq a_{n-1} && \text{(odečtení 1)} \qquad (5) \end{aligned}$$

Teď na pravé straně použijeme indukční předpoklad, že $a_{n-1} \geq 0$. Dostaneme tedy nerovnost

$$1 \quad \geq \quad 0, \tag{6}$$

což je platná nerovnost, kterou jsme odvodili z nerovnosti (1) pouze pomocí ekvivalentních úprav a indukčního předpokladu. Tedu i nerovnost (1) platí. $\square$

Vypočítejte a_2 a důkladně vysvětlete, jak je možné, že vyšlo co vyšlo s ohledem na Tvrzení 1 a jeho důkaz.

alternativní zadání (za méně bodů)

Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ lze mřížku $(1, \ldots, 2^n) \times (1, \ldots, 2^n)$, ve které chybí jedno políčko vydláždit dílky tvaru L. Dále dokažte, že nikdy (tedy pro žádné n) nelze mřížku pokrýt dílky tvaru L zcela beze zbytku.