

Cvičení 7

1 Důkaz přímý

1. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

2 Matematická indukce

1. Dokažte, že nerovnost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

platí pro všechna $n \geq 2$.

2. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro každé sudé n lze mřížku $3 \times n$ vydláždít dominovými kostkami 2×1 .
3. Dokažte, že libovolnou částku peněz větší než 4 Kč vyjádřenou v celých korunách lze sestavit jen užitím dvoukorun a pětikorun.
4. Mezi 2^{n+1} přirozenými čísly lze vždy nalézt 2^n čísel, jejichž součet je dělitelný 2^n . *Vyložit, že při indukci nepřidáváme, ale ubíráme.*
5. Pomocí matematické indukce dokažte, že každá množina velikosti k má právě 2^k různých podmnožin. (Postupujte indukcí podle k .)
6. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ lze mřížku $(1, \dots, 2^n) \times (1, \dots, 2^n)$, ve které chybí kus $(1, \dots, 2^{n-1}) \times (1, \dots, 2^{n-1})$ vydláždít dílky tvaru L.
7. Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ lze mřížku $(1, \dots, 2^n) \times (1, \dots, 2^n)$, ve které chybí dílek na pozici $(1, 1)$, vydláždít dílky tvaru L.

3 Důkaz sporem

1. Dokažte, že neexistuje nejmenší kladné racionální číslo.
2. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.
3. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
4. Dokažte, že pomocí dílků tvaru L nelze vyplnit mřížku $(1, \dots, 2^n) \times (1, \dots, 2^n)$.

4 Důkaz obměnou

1. Dokažte pro všechna přirozená čísla n : jestliže číslo $n^2 + 2$ není dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné číslo n .