Cvičení 5

1 Kvantifikátory

Zvolte množiny, přes které se kvantifikuje, a dosaďte predikát "ze života" tak, aby platilo:

1. $\forall x \exists y \; P(x, y)$
2. $\exists y \forall x \; P(x, y)$
3. Aby platilo $\forall x \exists y \; P(x, y)$, ale neplatilo $\exists y \forall x \; P(x, y)$.
4. Aby tvrzení $\forall x \; (P(x) \vee Q(x))$ platilo, ale $(\forall x \; P(x)) \vee (\forall x \; Q(x))$ neplatilo.
5. Aby tvrzení $(\exists y \; R(y)) \wedge (\exists y \; S(y))$ platilo, ale tvrzení $\exists y \; (R(y) \wedge S(y))$ neplatilo.
6. Aby platilo $(\forall x \; P(x)) \Rightarrow (\forall x \; Q(x))$, ale neplatilo $\forall x \; (P(x) \Rightarrow Q(x))$.
7. $\forall x \exists y \forall z \; P(x, y, z)$
8. $\exists x \forall y \exists z \; P(x, y, z)$

2 Prenexní operace

Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou ekvivalentní. Výroky B a C neobsahují proměnnou x.

1. $\forall x(B \Rightarrow P(x))$ a $B \Rightarrow (\forall x \; P(x))$.
2. $\exists x(B \Rightarrow P(x))$ a $B \Rightarrow (\exists x \; P(x))$.
3. $\forall x(Q(x) \Rightarrow C)$ a $(\forall x \; Q(x)) \Rightarrow C$.
4. $\forall x(Q(x) \Rightarrow C)$ a $(\exists x \; Q(x)) \Rightarrow C$.
5. $\exists x(Q(x) \Rightarrow C)$ a $(\exists x \; Q(x)) \Rightarrow C$.
6. $\exists x(Q(x) \Rightarrow C)$ a $(\forall x \; Q(x)) \Rightarrow C$.
7. $\exists x(Q(x) \wedge C)$ a $(\exists x \; Q(x)) \wedge C$.

Uveďte formuli do prenexního tvaru.

1. $(\forall x P(x)) \Rightarrow (\forall x Q(x))$
2. $B \Rightarrow (((\forall x \; P(x)) \Rightarrow C) \wedge (\exists y \; Q(y)))$

3 Formule

Rozhodněte, pro které z množin

1. $M_1 = \{1\}$,
2. $M_2 = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
3. $M_3 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^i, \ldots\}$,
4. $M_4 = \{-3, 3, 15\}$

platí tvrzení:

1. $\forall x \in M \; \exists y \in M \; y > x$

2. $\exists y \in M\ \forall x \in M\ y \geq x$
3. $\forall x \in M$ (“x je sudé” $\vee$ “x je liché”)
4. ($\forall x \in M$ “x je sudé”) $\vee$ ($\forall x \in M$ “x je liché”)
5. $\forall x \in M\ \forall y \in M\ \exists z \in M\ z = x \cdot y$
6. $\exists x \in M\ \forall y \in M\ \exists z \in M\ x \cdot y = z$
7. $\exists x \in M\ \forall y \in M\ \exists z \in M\ y \cdot z \neq x$
8. $\exists a \in M\ \forall b \in M\ \exists c \in M\ b + c = a$
9. $\forall x \in M\ \exists y \in M\ \forall z \in M\ y \cdot z > x$

Najděte množiny M, pro které platí následující:

1. $(\forall x \in M\ \exists y \in M\ y > x)$ a zároveň $(\forall x \in M\ \exists y \in M\ y < x)$.
2. $(\exists x \in M\ \forall y \in M\ y \leq x)$ a zároveň $(\exists x \in M\ \forall y \in M\ y \leq x)$.
3. $\forall x \in M\ \forall y \in M\ x + y \neq 6$.
4. $\forall x \in M\ \forall y \in M\ x + y = 6$.
5. $(\exists x \in M\ \forall y \in M\ \exists z \in M\ x \cdot y = z)$, ale neplatí $(\forall x \in M\ \forall y \in M\ \exists z \in M\ z = x \cdot y)$.
6. $(\exists x \in M\ \forall y \in M\ y \geq x)$ a zároveň $(\forall a \in M\ \exists b \in M\ a + b = 6)$.