Lineární algebra II - 24.4. CV 9

Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ je definován jako

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$.

Nechť vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ svírají úhel α. Pak platí:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}$$

I) Aniž byste dopočítávali integrál, ukažte, že pro libovolná $a, b, r \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0, r > 0$ mají funkce $f_a(x) = \sin(ax)$ a $g_b(x) = \cos(bx)$ nulový skalární součin, t.j. jsou na sebe v odpovídajícím vektorovém prostoru kolmé.

Tento součin je dán předpisem: $\langle f_a | g_b \rangle = \int_{-r}^{r} f_a(x) g_b(x) dx$.

II) Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$. Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

III) Nechť $\|\mathbf{u}\| = 12, \|\mathbf{v}\| = 5$. Navíc $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$. Určete $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

IV) Nechť $\|\mathbf{u}\| = 13, \|\mathbf{v}\| = 19, \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 24$. Určete $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Všimni si, že zadání splňuje trojúhelníkovou nerovnost.

V) Nechť $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Navíc $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$. Tedy jsou na sebe kolmé. Určete α tak, že vektory $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}$ a $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}$ svírají úhel $\pi/6$.

VI) Určete úhel mezi dvojicemi vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus). Rozhodněte, jestli jde o úhel ostrý nebo tupý:

a) $\mathbf{x} = (1, -4)^T, \mathbf{y} = (8, 2)^T$

b) $\mathbf{x} = (3, 2, -2)^T, \mathbf{y} = (0, 4, 1)^T$
c) $\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T, \mathbf{y} = (1, 0, -1)^T$
d) $\mathbf{x} = (3, 4)^T, \mathbf{y} = (-1, 0)^T$

VII) V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r\}$ prostoru s bazí $B = \{\mathbf{x}^T = (1, 1, 1, 1), \mathbf{y}^T = (4, 1, 4, 1), \mathbf{z}^T = (1, 2, 3, 4)\}$.

alternativně $B = \{(0, 3, 4, 0)^T, (0, 0, 5, 0)^T, (2, 1, 0, 2)^T\}$
, $B = \{(2, 4, 2, 1)^T, (-1, -2, -2, -1)^T, (1, 2, 4, 2)^T, (1, 2, 3, 4)^T\}$

VIII) Rozšiřte ortonormální bázi Z z předchozího příkladu na ortonormální báze $\mathbb{R}^4$.

IX) Pro prostor z příkladu I) určete ortogonální projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

X) Určete vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T$ a $C = (4, -2, 2, -1)^T$.

XI) Najděte bazi ortogonálního doplňku prostoru W s bazí $B = \{(1 + i, 2, 0, -1)^T, (i, 1, -i, 2)^T\}$. Řešte v $\mathbb{C}^4$.